

Quadrati magici

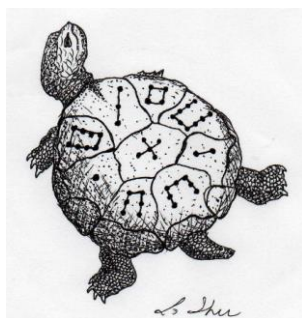
di Anna Maria Gennai

(prima parte)

Con quadrato magico si intende una tabella quadrata con i numeri disposti in modo tale che le somme di quelli presenti su ogni riga siano uguali tra loro e uguali sia a quelle dei numeri disposti su ciascuna colonna, sia a quelle dei numeri sulle diagonali. Il più famoso quadrato magico ha addirittura un nome: *Lo Shu*, e ha 5000 anni. Secondo una leggenda, il fiume *Lo* in Cina aveva provocato inondazioni che devastavano i raccolti e a nulla erano serviti i sacrifici per placare l'ira del dio del fiume. Un giorno *Yu*, un essere metà uomo e metà orso al quale erano attribuite capacità divinatorie, osservò che una tartaruga sulle sponde del fiume aveva il dorso suddiviso in nove settori con punti che indicavano le cifre da 1 a 9, distribuite in modo che le somme, comunque effettuate sulle righe o sulle colonne o in diagonale, fossero sempre uguali a 15. *Yu* suggerì di offrire al dio del fiume un numero di sacrifici pari a 15 e gli straripamenti cessarono. Da quel momento, al quadrato vennero associate proprietà mistiche e profetiche.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il primo quadrato magico



La tartaruga della leggenda

(Fonte:

https://www.researchgate.net/figure/Lo-Shu-Thanks-to-Byerly-Wiser-Cline_fig15_265536380)

Curiosamente i simboli che secondo la leggenda erano impressi sul dorso della tartaruga sono rappresentati nel logo dell'associazione dei ragionieri commercialisti.



Il logo dei ragionieri commercialisti con i numeri da 1 a 9 disposti a formare il primo quadrato magico

Sono numerose le proprietà matematiche legate a questi quadrati. Per prima cosa è possibile determinare il numero che caratterizza ciascuna di queste tabelle particolari, ovvero la somma che si ottiene su ciascuna riga, colonna, diagonale. Osserviamo che su un quadrato di ordine 3, per così dire perfetto perché potremmo anche realizzare quadrati con numeri comunque scelti, si inseriscono le cifre da 1 a 9, su un quadrato di ordine 4 i numeri da 1 a 16, eccetera... in generale su un quadrato magico perfetto di ordine n le cifre da 1 a n^2 . La somma di tutti i numeri inseriti in un quadrato di ordine n è allora ottenibile con l'espressione

$$S_{n^2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

immediatamente derivabile dalla formula scoperta dal piccolo prodigioso Gauss nel XVIII secolo, che ci fornisce la somma dei primi n numeri interi, nella quale basta sostituire n con n^2 .

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Se la somma di tutti i numeri di un quadrato è S_{n^2} , la somma degli elementi su ciascuna riga è $S_{n^2}:n$, perché in un quadrato di ordine n ci sono n righe e la somma degli elementi di ognuna è la stessa. In conclusione, il numero che caratterizza un quadrato magico di ordine n è

$$S_{n^2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Quindi se $n=3$ abbiamo $3(9+1):2=15$, se $n=4$ la somma dei numeri di ciascuna riga o colonna o diagonale è $4(16+1):2=34$ e così via.

Con le cifre da 1 a 9 è possibile realizzare il solo quadrato sopra descritto, a meno di scambi di righe o di colonne nella loro posizione, ma se moltiplichiamo per uno stesso numero quelli presenti in ogni casella, si mantiene la proprietà dell'identica somma, che ovviamente non sarà più 15, ma moltiplicata per il fattore scelto. Nella tabella sottostante, nella quale tutti i numeri sono stati moltiplicati per 2, la somma "magica" è $15 \times 2 = 30$.

:

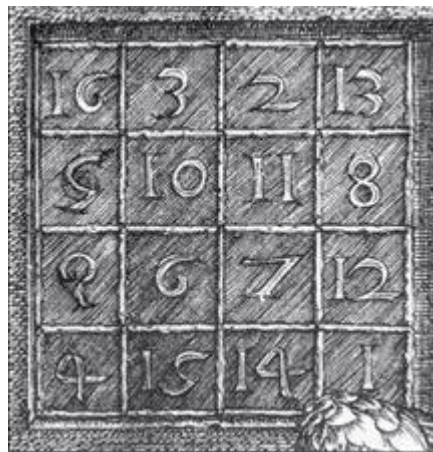
12	14	4
2	10	18
16	6	8

Salvo queste modifiche, esiste un solo quadrato magico di ordine 3. Ne esistono invece ben 880 di ordine 4, contenenti i numeri da 1 a 16. Il numero cresce enormemente per quelli di ordine 5, sarebbero quasi 300 milioni, mentre ancora non è stato calcolato quanti siano quelli di ordine 6, ma dovrebbero essere miliardi di miliardi.

Tra i più famosi di ordine 4 c'è il quadrato magico rappresentato nel dipinto *Melancholia I* dell'artista tedesco Albrecht Dürer, in cui compare assieme a simboli alchemici alle spalle di una figura alata pensierosa e sconfortata, perché forse non convinta dei suoi studi sulle forze occulte della natura.



Albrecht Dürer, *Melancholia I*, 1514, Staatliche Kunsthalle, Karlsruhe



Il quadrato magico rappresentato nell'incisione; nelle due celle centrali dell'ultima riga i numeri 15 e 14, che insieme formano 1514, anno in cui fu realizzato. Ai quadrati magici venivano associate proprietà connesse all'influsso dei pianeti sulla vita umana

Un altro curioso quadrato adorna la Facciata della Passione nella Sagrada Familia a Barcellona. È opera dello scultore spagnolo Josep Maria Subirachs ed è collocato accanto alla statua rappresentante il bacio di Giuda. Questo quadrato non è, per così dire, perfetto, in

quanto due numeri, precisamente il 10 e il 14, sono ripetuti due volte. La somma magica non è 34, ma 33, forse per ricordare gli anni di Cristo.

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Il quadrato magico di ordine 4, imperfetto, dello scultore Subirachs, uno degli ornamenti della Sagrada Familia

Due quadrati magici, uno di ordine 6 e l'altro di ordine 9, detti quadrato del Sole e quadrato della Luna, per gli effetti magici attribuiti alle stelle e ai pianeti, sono rappresentati nel manoscritto 2433, conservato alla Biblioteca Universitaria di Bologna

1	32	34	3	35	6
30	8	27	28	11	7
20	24	25	16	13	23
19	17	21	22	18	14
10	26	12	9	29	25
31	4	2	33	5	36

Il quadrato magico del Sole, manoscritto 2433 presso la Biblioteca Universitaria di Bologna

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	58	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Il quadrato magico della Luna, manoscritto 2433 presso la Biblioteca Universitaria di Bologna

Per finire, alcuni studiosi, tra i quali Piergiorgio Odifreddi¹, hanno ricondotto ai quadrati magici una filastrocca presente nel Faust, dramma composto in sessanta anni dallo scrittore tedesco Johann Wolfgang Goethe nel XIX secolo. Narra il viaggio del demone Mefistotele assieme al dottor Faust che in una delle loro peregrinazioni incontrano una strega che solennemente recita dal suo libro²:

*Devi comprendere!
Di Un fai Dieci,
getta via il Due,
uguaglia il Tre,
e sarai ricco.
Che crepi il Quattro!
Di Cinque e Sei,
dice la strega,
fai Sette e Otto.
È tutto fatto.
Se Nove è Uno,
Dieci è nessuno.
Questa è la tabellina della strega.*

Ci si può divertire a interpretarla, per trasformare la griglia con i numeri da 1 a 9 in un quadrato magico... una possibile soluzione è proposta nel Faust-Museum di Knittlingen, a una trentina di chilometri da Karlsruhe, in Germania, e riportata da Giorgio Bagni³.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4	9	2
3	5	7
8	1	6

¹ Cfr. <https://ricerca.repubblica.it/repubblica/archivio/repubblica/2005/05/26/la-scienza-madre-dell-arte.html>

² Cfr. <http://www.ousia.it/content/Sezioni/Testi/GoetheFaust.pdf>

³ Cfr. <http://www.syllogismos.it/2008-LeonTesto.pdf>

Per approfondimenti di tipo matematico è interessante l'articolo di Luciana Marconi, *The Algebra of Magic Squares*, pubblicato in occasione dello Stockholm International Youth Science Seminar⁴.

Infine, se forse se lo sono chiesto gli appassionati di Sudoku, la griglia del famoso rompicapo non è un quadrato magico, è solamente composta da 9 tabelle più piccole, dove inserire una sola volta le cifre da 1 a 9, ma la somma sulle righe o colonne o diagonali non è costante.

Fine prima parte

⁴ Cfr. https://siyss20.ungaforskare.se/Luciana.marconi_report.pdf