ACCADEMIA NAVALE

Syllabus

POLIGRAFICO ACCADEMIA NAVALE
LIVORNO

PREFAZIONE

È noto che in taluni ordini della scuola media superiore l'insegnamento della matematica non giunge sino all'ultimo anno, in altri, lo svolgimento del programma è spesso finalizzato al superamento della sola prova scritta dell'esame di maturità.

Ne consegue che alcuni studenti hanno una preparazione incompleta e comunque non sufficiente a superare l'esame di ammissione al 1° anno dei corsi normali dell'Accademia Navale.

Nasce da queste considerazioni la compilazione del presente "Syllabus" che ha anche lo scopo di elencare nel dettaglio gli argomenti per l'esame di ammissione ma soprattutto servirà all'aspirante allievo per verificare la propria preparazione, la comprensione della teoria e la propria abilità nell'utilizzare lo strumento matematico.

Questo "Syllabus", che ricalca quello proposto dall'UMI, è strutturato in 14 sezioni; ogni sezione consta di tre parti contrassegnate con le seguenti lettere

N nozioni che occorre <u>CONOSCERE</u>

Q quesiti e semplici esercizi che occorre <u>SAPER FARE</u>

S esercizi per la cui soluzione sono richieste nozioni e capacità culturalmente più rilevanti.

Sezione 1

N Numeri naturali - Numeri primi - M.C.D. e m.c.m. - Frazioni numeriche - Operazioni con frazioni - Numeri interi relativi - Numeri razionali relativi - Potenza di numeri interi e di numeri razionali - Disuguaglianze

Q

1. Provare che il quadrato di un numero dispari è dispari.
2. Provare che per ogni *n* i numeri $4n^4 - 1$ e $4n^4 + 1$ non sono primi.
3. Calcolare M.C.D. e m.c.m. di 715 e 385.
4. Provare che se due numeri hanno un divisore comune, anche la loro somma e la loro differenza hanno lo stesso divisore comune.
5. Provare che due numeri consecutivi sono primi fra loro.
6. Determinare *n* in modo che

   1. $2^n \cdot 5^n = 100$ $\qquad 16^n : 8 = 32$ $\qquad 2^{2^n} = 256$.
7. Trovare una frazione $\dfrac{P}{Q}$ tale che $\dfrac{1}{52} < \dfrac{P}{Q} < \dfrac{1}{53}$.
8. Trovare le frazioni generatrici di $2,\overline{3}$ e $3,4\overline{3}$.
9. Sapendo che $x \cdot y = -7$ calcolare

   2. $(-x)(y) + 2x(-y) + (-x)(-y/4)$
10. Determinare i numeri naturali *n* per cui

    3. $-1 < \dfrac{n}{-3} < 1$ $\qquad -1 < \dfrac{3}{n} < 4$ $\qquad 1 < \dfrac{12}{n-10} < 6$
11. Determinare il maggiore fra i due numeri 12^9, 9^{12}.

S

1. Dire per quali valori di *n* il numero $2n^2 - 3n + 3$ è divisibile per $n - 3$.
2. Dire qual è il resto della divisione di 2^n per 7 essendo $n \geq 3$.
3. Determinare i numeri *m*, *n* tali che $m + n = 8075$ e $\dfrac{m.c.m.(m,n)}{M.C.D.(m,n)} = 84$.
4. Dire per quali *n* il numero $\dfrac{n+7}{n-11}$ è naturale.
5. Determinare due numeri *m*, *n* aventi somma 552, quoziente 5 ed un certo resto.
6. La somma di tutti i numeri interi minori di un numero primo *p* è un numero divisibile per *p.*

Sezione 2

N. Monomi - Polinomi - M.C.M. e m.c.m. - Operazioni con polinomi - Fattorizzazione di polinomi - Teorema e regole di Ruffini- Espressioni razionali fratte.

Q.

1. Scomporre $0{,}01x^2y^2 + x^3y^3 + 25x^4y^4$ nel prodotto di due fattori.
2. Facendo uso di prodotti notevoli calcolare mentalmente 99^2 e $41 \cdot 39$.
3. Determinare il polinomio $P(x)$ sapendo che $P(x+1) = x^2 - 3x + 2$.
4. Determinare a, b in modo che $P(x) = x^2 + ax + b$ sia tale che $P(1) = 2$, $P(2) = 4$.
5. Determinare quoziente e resto di $(2y^6 - 3y^3 - a) : (y^3 - 3)$.
6. Assegnati $P_1(x) = x^2 - x + a$, $P_2(x) = 2x^3 + x - a$, determinare il valore di a in modo che il polinomio $P_3(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) - 2$ abbia uno zero in $x = 1$.
7. Nel polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ determinare a, b in modo che risulti divisibile per $(x-1)\,(x+1)$.
8. Determinare a, b, c in modo che $\dfrac{2}{x^3 - 3x + 2x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$.

S.

1. Costruire il polinomio $P(x)$ di grado minimo, con coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1, tale che $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(-1) = 2$.
2. Trovare due interi x, y tali che $y^3 + (x-2)y^2 - (2x-1)y + x = 3$
3. Dopo aver detto per quali n il polinomio $P(x,y) = (x+y+1)^n - x^n - y^n - 1$ è divisibile per $(x+y)(x+1)(y+1)$, scomporre in prodotto di fattori il polinomio $(x+y+1)^3 - x^3 - y^3 - 1$.
4. Provare che risulta $a^4 + b^4 - a^3b > 0$ per ogni coppia (a,b) con $a \neq 0, b \neq 0$.
5. Sia $P(x) = x^2 - 2x + 2$ e si consideri $Q(x) = P[P(x)]$; provare che gli zeri di $P(x) - x$ sono anche zeri di $Q(x) - x$.
6. Determinare un polinomio $P(x)$ di 3° grado tale che $P(0) = 0$ e tale che $P(x) - P(x-1) = x^2$; sfruttare tale risultato per trovare la somma dei quadrati dei primi 10 numeri naturali.

Sezione 3

N.	**Numeri reali - Potenza con esponente intero - Radice n.ma - Radicali aritmetici - valore assoluto - Potenza $a^x(x\in \mathbf{Z}, x\in \mathbf{Q})$- Operazioni con radicali - Media aritmetica e media geometrica di numeri positivi - Potenza $a^x(x\in \mathbf{R})$- La funzione $x\to a^x$ - Il logaritmo - La funzione $x\to \log x$**

Q. 1. Determinare gli x reali per cui $\left|\sqrt{2}-x\right|<1$.

2. Determinare gli x reali per cui $\left|\frac{1}{x}-\sqrt{3}\right|>2$.

3. Ridurre $\sqrt{|x|}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x^4}$ a tre radicali aventi lo stesso indice.

4. Provare che $\sqrt{20}+\sqrt{45}+\sqrt{80}<27$.

5. Determinare i valori di x per cui $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-2}>2$

6. Dimostrare che la media geometrica di due numeri positivi è non maggiore della loro media aritmetica

7. Dire quale dei due numeri $\left(\sqrt{5}+2\right)^{-\sqrt{3}}$, $\left(\sqrt{5}-2\right)^{3}$ è il maggiore.

8. Provare le seguenti uguaglianze

$$\log_a b=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b} \quad , \quad (\log_a b)(\log_b a)=1 \quad , \quad \log_a b = l0g_{\sqrt{a}}\sqrt{b}$$

9. Essendo $a,b,c\in \mathbf{R}$, è vera l'implicazione $(a-c)^2=(b-c)^2 \Rightarrow a=b$?

S. 1. Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni

$$A=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}, B=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$$

2. Mettere sotto forma di prodotto di due fattori $\sqrt{a^3x}-\sqrt{ax^3}+\sqrt{a^3x^3}$.

3. Semplificare la seguente espressione $\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2-x^3}}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$.

4. Sia a razionale con $0\le a\le 1$; provare che se $x,y\in \mathbf{R}^+$ si ha

$$\left|x^a-y^a\right|\le \left|x-y\right|^a$$

5. Provare che $\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_b x}+\dfrac{1}{\log_c x}=\dfrac{1}{\log_{abc} x}$

6. Provare che $\log_3 2\cdot \log_4 3\cdot .....\cdot \log_8 7=\dfrac{1}{3}$.

Sezione 4

N. Le equazioni e i principi di equivalenza - Equazioni e disequazioni lineari - Equazioni di 2° grado o ad essa riconducibili - Regola dei segni di Cartesio - Relazione fra i coefficienti e le radici di un'equazione di 2° grado - Disequazioni di 2° grado - Equazioni e disequazioni razionali.

Q. 1. Risolvere al variare di a le equazioni

$$\frac{x}{a}+\frac{x+1}{a+1}=\frac{1}{a^2+a} \quad , \quad \frac{x}{a-1}+\frac{x+1}{a+1}=\frac{1}{1-a^2}$$

e si dica se esistono valori di a per cui sono equivalenti.

2. Risolvere al variare di a l'equazione $\dfrac{x-1}{x-a}=\dfrac{x-2}{x+3}$.

3. Al variare di $a\in\mathbf{R}$ determinare i valori di x per cui $|ax-1|<2$.

4. Si dica per quali valori di $a\in\mathbf{R}$ l'equazione $ax^2+(a-1)x+(1-a)=0$ ha soluzioni e al variare di a si determini il loro segno.

5. Assegnata l'equazione $x^2-(a+1)x+a=0$ determinare a in modo che ammetta due radici x_1,x_2 tali che $x_1-x_2=2$.

6. Assegnata l'equazione $x^2+ax+b=0$ si scriva l'equazione di 2° grado avente come radici le reciproche dell'equazione assegnata; quale legame deve intercorrere tra a e b affinché ammetta due radici x_1,x_2 tali che $0<x_1<1<x_2$?

7. Studiare la disequazione $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2>0$

S. 1. Assegnato $P(x)=x^4-7x^3+10x^2+14x-24$ studiarne il segno, sapendo che esso ha due zeri x_1,x_2 tali che $x_1x_2=12$.

2. Al variare di a studiare la disequazione $1-ax<\dfrac{1}{|ax-1|}$.

3. Assegnata l'equazione $x^2-ax-a-1=0$ dire per quali valori di a essa ammette due radici x_1,x_2 tali che la somma $x_1^2+x_2^2$ sia minima.

4. Trovare i due numeri x,y dei quali è nota la somma s $(s=4)$ ed il rapporto p tra la somma dei cubi e la somma dei quadrati $(p=2)$.

5. Studiare il segno del polinomio $P(x)=x^6-4x^5+3x^4-3x^2+4x-1$.

6. Provare che se m, n sono interi dispari l'equazione $x^2+mx+n=0$ non ha radici razionali.

Sezione 5

N. Sistemi lineari - Sistemi di equazioni di grado superiore al 1° - Sistemi omogenei - Equazioni e disequazioni irrazionali - Sistemi misti.

Q. 1. Risolvere i seguenti sistemi

a) $\begin{cases} \sqrt{x-y}=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=a \\ xy-3x+2y=-3a \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left|x^2-2x\right|+y=1 \\ x^2+y=1 \end{cases}$

2. Provare, giustificando la risposta, che delle seguenti equazioni

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=1 \quad , \quad \sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=1 \quad , \quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}=1$$

solo una ammette soluzione.

3. Risolvere l'equazione $3\sqrt{x^2+x-2}=x^2+x$.

4. Risolvere le seguenti disequazioni

a) $x+(a+1)\sqrt{-x}-a>0 \qquad a\in \mathbf{R}^+$

b) $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Risolvere il sistema $\begin{cases} \sqrt{x-a}=1-x \\ x^2-(1+a)x+a>0 \end{cases}$

S. 1. Si giustifichi perché la seguente equazione $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x-1}}$ è impossibile.

2. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 3x+2y-2\sqrt{3x+2y}=8 \\ |x-1|+y=1 \end{cases}$

3. Si giustifichi perché la seguente disequazione $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}<1$ è impossibile.

4. Risolvere al variare di a la disequazione $\sqrt{a^3x}-\sqrt{ax^3}>x^2-ax$.

5. Provare che la seguente disequazione $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leq\sqrt{|x-y|}$ è verificata da ogni coppia (x,y) di numeri reali.

Sezione 6

N. Equazioni esponenziali ed equazioni logaritmiche. Disequazioni esponenziali e logaritmiche. Sistemi misti.

Q. 1. Completare le seguenti implicazioni

$$3^x > 3^{x^2} \Rightarrow x \,....\, x^2$$

$$(0{,}1)^{2-x} < (0{,}1)^{x+x^2} \Rightarrow 2-x \,....\, x+x^2$$

2. Facendo uso dei teoremi sui logaritmi, trasformare le seguenti espressioni in somme algebriche:

$$\log \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{\sqrt{c}}}} \quad , \quad \log\left(\log a^{m \cdot n}\right)$$

3. Determinare la base dei seguenti logaritmi:

$$\log_x \sqrt[3]{\frac{81}{16}} = -\frac{2}{3} \quad , \quad \log_x 3\sqrt[3]{3} = \frac{4}{5}$$

4. Risolvere le seguenti equazioni

a) $2^{2x+5} + 2 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2^{2x+4}$

b) $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} = 2$

5. Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 7 \end{cases}$$

6. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\left|log_2\left(x^2 - x - 1\right)\right| > \dfrac{1}{log_2\left(x^2 - x - 1\right)}$

b) $8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 > 0$

S. 1. Risolvere la seguente disequazione:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x - 3\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x > 2\,.$$

2. Risolvere il sistema $\begin{cases} x^{x+y} = y^a \\ y^{x+y} = x^{4a} \end{cases}$, $a \in \mathbf{R}^+$.

3. Risolvere la seguente disequazione: $2^{2x} + 2^x \cdot a^x - a^{2x+1} > 0$, $a \neq 2$.

4. Provare che le uniche soluzioni del sistema $\begin{cases} xe^y + ye^x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ sono $(0\,,1)$ e $(1\,,0)$.

5. Provare che l'equazione $2x^4 - 2x^3 + 2^x = 0$ è impossibile.

Sezione 7

N. La geometria euclidea del piano. Principali luoghi geometrici. Costruzioni "con riga e compasso". Nozioni di uguaglianza (o congruenza), di similitudine, di equivalenza di figure piane. La circonferenza e sue principali proprietà.

Q.

1. Verificare che la retta perpendicolare ad un segmento *AB*, passante per il suo punto medio coincide con il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi A, B ("*asse del segmento*").
2. Date due rette incidenti *r*, *s*, verificare che il luogo geometrico dei punti equidistanti da *r* e *s* è costituito da una coppia di rette tra loro ortogonali (le "*bisettrici*" degli angoli individuati da *r* e *s*).
3. Costruire con riga e compasso (*ovvero descrivere un procedimento per ottenere una tale costruzione*) la circonferenza passante per tre punti non allineati.
4. Costruire con riga e compasso un triangolo, noi tre suoi elementi (lati o angoli interni) dei quali almeno uno sia un lato.
5. Costruire con riga e compasso le rette tangenti ad una circonferenza, passanti per un punto esterno ad essa.
6. Verificare che se un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza, allora la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.
7. Costruire con riga e compasso la "*parte aurea*" di un segmento.

S.

1. Dimostrare che ogni trapezio inscrittibile in una circonferenza è isoscele.
2. Costruire con riga e compasso le rette tangenti comuni a due circonferenze date.
3. Costruire con riga e compasso il lato di un decagono regolare inscritto in una data circonferenza.
4. Costruire con riga e compasso un quadrato equivalente ad un dato poligono convesso.

Sezione 8

N. Geometria dello spazio: posizione reciproca di rette e piani nello spazio. Rette complanari o sghembe. Angolo di due rette, di due piani, di una retta e un piano. Perpendicolarità tra due rette, tra due piani, tra retta e piano.

Q.

1. Si dimostri che una qualunque retta r di un piano α ed una retta s non contenuta in α e che incontra α in un punto P non appartenente ad r sono sghembe.
2. Si riconosca che tre rette aventi a due a due un punto in comune, o giacciono in un piano o passano per uno stesso punto.
3. Dati una retta r ed un punto P non appartenente ad essa, giustificare l'esistenza e l'unicità della retta per P, perpendicolare e incidente r.
4. Giustificare che i piani passanti per un punto e perpendicolari ad un piano dato costituiscono un fascio proprio e descrivere la retta sostegno.

S.

1. Date due rette sghembe r, s ed un punto P, individuare una retta passante per P e complanare con r e s.
2. Date una retta r e un punto P (non necessariamente appartenente a r) giustificare che esistono infinite rette per P che formano un angolo ϑ $\left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right)$ con r. Quante di esse sono complanari con r?
3. Siano α e β due piani incidenti e sia r la loro retta di intersezione. Si dimostri che fra le rette di α, quelle formanti angolo massimo con β sono le perpendicolari ad r.
4. Sia ϑ $\left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right)$ la misura (in radianti) di un angolo compreso tra due piani incidenti α e β. Se una retta r appartenente a β forma con α un angolo di ampiezza ϑ, in quale posizione si trova r rispetto alla retta di intersezione tra i piani α e β?

Sezione 9

N. Distanza di due punti, di due rette, di due piani; distanza di un punto da una retta, di un punto da un piano, di una retta da un piano.

Q.

1. Verificare che tra tutti i segmenti aventi un estremo assegnato e l'altro appartenente ad un dato piano, ne esiste uno di lunghezza minima.
2. Verificare che tra tutti i segmenti aventi gli estremi appartenenti a due piani paralleli, ne esistono di lunghezza minima.
3. Individuare, mediante intersezioni con piani opportuni, il segmento di minima distanza tra due rette sghembe.
4. Individuare tutte le rette equidistanti da due piani paralleli assegnati.
5. È vero o falso che la distanza di un punto da un piano coincide con quella di tale punto da una qualsiasi retta contenuta nel piano?
6. Calcolare il rapporto tra i volumi di un cubo inscritto e di uno circoscritto ad una stessa sfera.

S.

1. Individuare tutti i piani equidistanti da tre punti non allineati.
2. Determinare perimetro e area della figura individuata dalla intersezione di un cubo di spigolo ℓ con un piano perpendicolare ad una diagonale del cubo nel suo punto medio.
3. Determinare la distanza tra due facce opposte (ovvero situate su piani paralleli) di un ottaedro regolare di spigolo ℓ.
4. Dati due piani incidenti α, β e un punto P, si individuino le rette contenute in α, aventi distanza assegnata h da P e formanti angolo massimo con β.

Sezione 10

N. Luoghi geometrici di punti, di rette, di piani. La sfera, il cono, il cilindro. Problemi basati sulla intersezione di luoghi geometrici.

Q.

1. Descrivere la sfera come luogo di punti, il cono e il cilindro come luogo di rette.
2. Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti P e Q assegnati.
3. Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due piani α e β assegnati.
4. Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti di una assegnata circonferenza γ.
5. Individuare il centro della sfera passante per una circonferenza γ e per un punto P non appartenente al piano di γ.
6. Individuare il centro della sfera tangente ad un piano α in un suo punto A e passante per un ulteriore punto B non appartenente a α.
7. Descrivere il luogo delle rette passanti per un punto P e formanti un assegnato angolo ϑ con un piano α.

S.

1. 1. Descrivere il luogo dei centri delle sfere passanti per un punto P e tangenti a due piani α e β tra loro paralleli e distinti.
2. Descrivere il luogo dei centri delle sfere di raggio assegnato e tangenti a due piani non paralleli.
3. Descrivere i piani passanti per una retta r ed aventi distanza assegnata h da un punto P.
4. Dati un piano α ed una retta r ad esso parallela, descrivere le eventuali rette di α parallele ad r ed aventi da r distanza assegnata d.
5. Dati due punti A e B, un piano α ed un segmento di lunghezza d, individuare le eventuali rette per A, parallele ad α ed aventi distanza d da B. Qual è il massimo numero di soluzioni?
6. Individuare l'asse di un cono circolare del quale sono assegnate tre generatrici.
7. Dimostrare che le circonferenze circoscritte alle quattro facce di un tetraedro appartengono alla superficie di una stessa sfera.
8. Dati un piano α ed una retta r perpendicolare ad α, descrivere il luogo dei punti equidistanti da r e da α.

Sezione 11

N. Coordinate ortogonali in un piano; equazioni di rette e di fasci di rette. Problemi di parallelismo e di perpendicolarità.

Q.

1. L'equazione "segmentaria" $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, con a e b numeri reali non nulli, rappresenta tutte le rette del piano?
2. Considerati i fasci di rette di equazioni $x+ay=0$ e $a(x-1)-y=0$, si individui il luogo geometrico dei punti di intersezione delle coppie di rette corrispondenti ad uno stesso valore del parametro a.
3. Verificare che le equazioni $a(x-1)+b(y-1)=0$ e $c(x-1)+d(x+y-2)=0$ rappresentano lo stesso fascio di rette.
4. Dato un parallelogramma *ABCD*, con $A(1,0)$, $B(4,1)$, $C(5,3)$, scrivere l'equazione della retta contenente il lato opposto ad *AB*.
5. Dato il triangolo di vertici $A(0,1)$, $B(3,0)$, $C(1,3)$, determinare il piede dell'altezza relativa alla base *AB*.
6. Determinare le simmetriche delle rette $r: x=0$ e $s: y=2x+1$ nella simmetria ortogonale rispetto alla retta $t: y=2x$.

S.

1. Considerate le rette $r: 3x+4y=0$, $s: 4x-3y=0$ e detti P un generico punto del piano, P_r e P_s le sue proiezioni ortogonali su r ed s, rispettivamente, determinare il luogo geometrico dei punti P tali che $2\ OP_r = OP_s$.
2. Date le rette $r: y-1=0$ ed $s: x-2y=0$, individuare i vertici dei rombi aventi due dei lati contenuti in r e s e di perimetro 8.
3. Individuare una isometria priva di punti "uniti" (ovvero che si trasformano in sé stessi) che sia composizione di un numero pari di riflessioni e che trasformi $A(1,-1)$ in $B(5,1)$. Descrivere inoltre le suddette riflessioni.

Sezione 12

N.	**Equazioni di una circonferenza rispetto ad un riferimento cartesiano ortogonale. Ellisse, iperbole, parabola come luoghi geometrici; loro equazioni canoniche. Parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$. Fasci di circonferenze.**

Q.

1. Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse delle *x* e tangenti in $T(1,1)$ alla retta $r : x - y = 0$.
2. Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$, scrivere l'equazione dell'iperbole avente gli stessi fuochi dell'ellisse e passante per il punto $P(1,0)$.
3. Individuare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per il punto $A(3,2)$ e tangenti all'asse delle *x*.
4. Tra le parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$ individuare quelle aventi il fuoco nel punto $P(2,1)$ e passanti per $Q(0,\sqrt{3})$. Se ne scrivano le equazioni.
5. Senza fare calcoli dire quanti sono i punti del piano cartesiano le cui coordinate verificano tutte e tre le seguenti condizioni: $x^2 - y = 0$, $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$, $xy < 0$.

S.

1. Verificare che, al variare del parametro reale ϑ, le coppie (x, y) tali che $x = 5\cos\vartheta$ e $y = 2\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ individuano nel piano cartesiano i punti di una ellisse della quale si chiede l'eccentricità.
2. Tra le circonferenze aventi il centro sull'ellisse di cui al precedente n° 1, trovare quelle tangenti sia all'asse *x* che all'asse *y*.
3. Facendo uso di un opportuno parametro reale, scrivere l'equazione delle circonferenze aventi il centro sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e tangenti all'asse *x*.
4. Nel piano cartesiano rappresentare graficamente il luogo dei vertici delle parabole di equazione $y = kx^2 - 2x$, essendo *k* un parametro reale non nullo.
5. Nel piano cartesiano rappresentare graficamente il luogo dei centri delle circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 2kx + \frac{k}{|k|}x = 0$.
6. Individuare i fuochi delle parabole passanti per i punti $P(2,1)$ e $Q(3,2)$ ed aventi per direttrice la retta di equazione $x = 0$.
7. Verificare che l'equazione $\frac{x^2}{1+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta una famiglia di ellissi eventi tutte gli stessi fuochi, al variare del parametro reale non nullo *b*. Riconoscere che per un punto $P(x, y)$ del piano passa un'ellisse della famiglia se e soltanto se $|x| > 1$ oppure $|x| \leq 1$ (con $y \neq 0$).

Sezione 13

N. Interpretazione geometrica, in un piano cartesiano, di sistemi di equazioni e disequazioni in due incognite, dipendenti da un parametro.

Q.

1. Si interpreti geometricamente il fatto che il sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax^2 + y + 2 = 0 \end{cases} \qquad a \in \mathbf{R}^+$$
non ha alcuna soluzione reale.
2. Si descriva il luogo geometrico dei centri delle circonferenze di equazioni
$$(x - \cos\vartheta)^2 + (y - \operatorname{sen}\vartheta)^2 = 1 \qquad , \qquad 0 \le \vartheta < 2\pi \ .$$
Si riconosca che tali circonferenze passano tutte per uno stesso punto; quale?
3. Servendosi della interpretazione geometrica si riconosca che il sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = m(x+2) \end{cases}$$
ha soluzioni per $-\frac{\sqrt{3}}{3} \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Discutere la risolubilità dei seguenti sistemi:
$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = x \\ |x| \le 1 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \\ y = m(x+2) \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \ .$$

S.

1. Stabilire una condizione analitica sufficiente affinché l'insieme dei punti che rappresentano le soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni algebriche in due incognite abbia un asse di simmetria parallelo all'asse y.
2. Discutere la risolubilità del seguente sistema:
$$\begin{cases} x^4 - y^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\ x^2 - (y-k)^2 + 1 = 0 \end{cases} \ .$$
3. Per quali valori di k il seguente sistema ha infinite soluzioni?
$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 y + y^2 - k^2 = 0 \\ xy - k(x^3 + x) = 0 \end{cases} \ .$$

Sezione 14

N. Misura degli angoli e degli archi circolari. Elementi di trigonometria piana: definizioni e principali formule. Equazioni e disequazioni trigonometriche. Risoluzione di triangoli.

Q.

1. Calcolare la misura in radianti e in gradi sessagesimali di un angolo alla circonferenza che insista su un arco di lunghezza uguale al raggio.
2. Risolvere le seguenti equazioni:
$$4\,\mathrm{sen}^2 x - 3 = 0$$
$$4\,\mathrm{sen}^2 2x - 1 = 0$$
$$\frac{\mathrm{sen}\,2x}{\tan x} = 0 \ .$$
3. Risolvere la seguente equazione:
$$\mathrm{sen}\,5x - \mathrm{sen}\,3x = \mathrm{sen}\,x \ .$$
4. Si riconosca che l'equazione $\cos(\cos x) = 0$ è impossibile, mentre l'equazione $\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x) = 0$ ammette soluzioni (quali?).
5. Risolvere il seguente sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} \sqrt{\mathrm{sen}^2 x} > \mathrm{sen}\,x \\ \sqrt{\cos^2 x} > \cos x \end{cases} ..$$

S.

1. Risolvere il seguente sistema di disequazioni (si consiglia di porre $\cos x = X$ e $\mathrm{sen}\,x = Y$):
$$\begin{cases} \mathrm{sen}\,x + \cos x < 1 \\ \mathrm{sen}\,x - \cos x < 0 \end{cases} .$$
2. Determinare i valori di *k* per i quali la disuguaglianza $k\cos x - \mathrm{sen}\,x + 1 \geq 0$ è vera per ogni *x*.
3. Verificare che, dati tre numeri reali α, β, γ tali che $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, risulta:
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma \ .$$