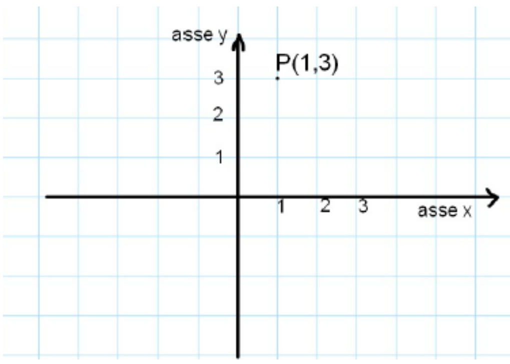
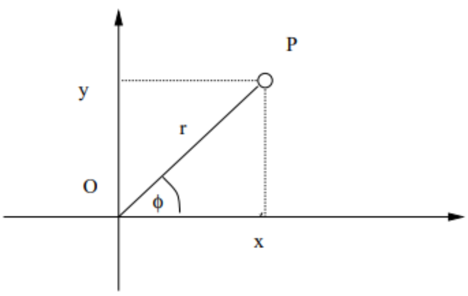
Coordinate (prima parte)

Le coordinate sono numeri che ci permettono di individuare la posizione di un punto, e quindi poi di un qualsiasi oggetto, rispetto a un sistema di riferimento assegnato. Ci sono due premesse da considerare: innanzitutto non va confuso il concetto di sistema di riferimento, che è un ente fisico, come un'aula, un laboratorio, un treno che transita davanti a una stazione, con quello di sistema di coordinate, che è un ente matematico. Inoltre nel cosiddetto spazio euclideo, cioè quello nel quale siamo abituati a pensare le figure geometriche, non esistono solo le coordinate cartesiane ortogonali, ovvero quei numeri reali che esprimono la distanza di un punto da due (nel piano) o tre assi di riferimento perpendicolari tra loro. Nel piano euclideo possiamo considerare ad esempio le coordinate polari (r,θ) in cui il modulo r è la distanza del punto dall'origine O di un riferimento cartesiano ortogonale e l'anomalia[1] θ è l'angolo che il segmento OP forma con l'asse x.



Riferimento ortogonale con coordinate cartesiane



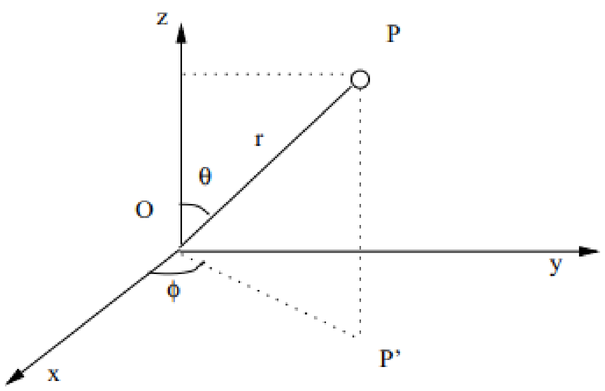
Riferimento con coordinate polari

[1] Dal greco ἀξωμαλία "irregolarità", in questo caso considerata come "deviazione".

Non è difficile, ma occorrono nozioni di trigonometria che si studiano in terza superiore, passare da un sistema di coordinate all'altro. Lo si fa ricorrendo a sistemi di relazioni espressi dalle formule

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}, \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\phi = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Nello spazio euclideo, oltre a quelle cartesiane, possono essere utilizzate le coordinate sferiche, ad esempio per descrivere sistemi meccanici. In questo caso, di angoli se ne devono considerare due, θ e ϕ, che si aggiungono alla lunghezza r del segmento OP.



Le formule di trasformazione da coordinate cartesiane a sferiche e viceversa sono date dai sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\phi = \frac{y}{x} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}.$$

Già che si è parlato di distanza… in quaranta anni di insegnamento, i ragazzi che nei primi giorni di prima superiore hanno saputo dire correttamente che la distanza è un numero si possono contare sulle dita di una mano. Alla domanda "che cos'è la distanza tra due punti?" tutti o quasi rispondono che è il segmento che li congiunge. Hanno chiaro in mente che il segmento che congiunge due punti è unico e che la distanza tra due punti è anch'essa unica, quindi sono portati a confondere i due concetti. Se si chiede "e la distanza tra un punto e una retta?" si rendono conto che di segmenti ce ne sono infiniti e quindi non si può dire che la distanza tra un punto e una retta è il segmento che li unisce, ma si deve scegliere quello che ha la minima lunghezza, corrispondente al segmento che ha un estremo nel punto ed è perpendicolare alla retta. Quando infine si chiede "che cos'è la distanza tra due rette parallele" capiscono che di segmenti di lunghezza minima ce ne sono infiniti e che se ne può scegliere uno qualunque tra essi, per così dire un rappresentante degli infiniti segmenti che sono perpendicolari a entrambe le rette. Allora, se invece di considerare come distanza un segmento, cioè un ente geometrico, si considera la lunghezza di questo segmento, si perde ogni ambiguità: si possono considerare le misure dei segmenti e avere a che fare, più semplicemente, con numeri, univocamente determinati, oltretutto sempre o positivi o nulli. Quindi, ricapitolando, si può dire che la distanza tra due punti non è il segmento che li unisce, bensì la lunghezza di tale segmento. Questa distanza è quella che chiamiamo euclidea. È bello, almeno per qualcuno…, scoprire che si possono definire altre distanze, diciamo che possiamo farlo negli spazi metrici, che sono per l'appunto spazi dotati di una distanza. Più precisamente possiamo definire una distanza su uno spazio metrico A come una funzione con le seguenti proprietà:

$d: A\text{x}A \rightarrow [0,+\infty[$;

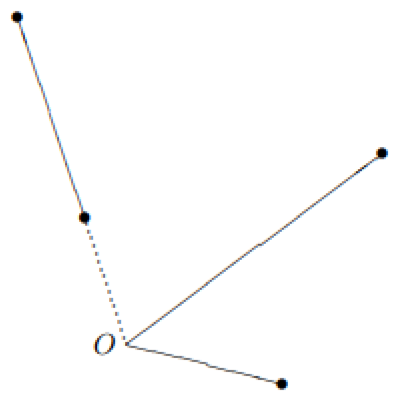
$d(x,y) \geq 0$; $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

$d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$, per ogni $x,y,z \in A$.

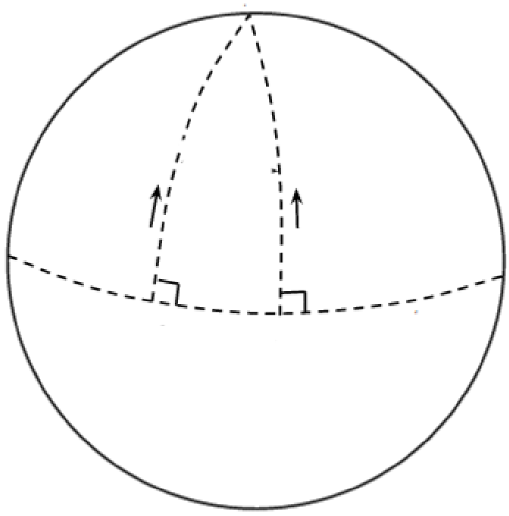
Tra le molte definibili in $\mathbb{R}^2$ è curiosa e facile da ricordare la cosiddetta distanza o *metrica del riccio*, la cui rappresentazione grafica assomiglia agli aculei dell'animaletto. È definita dalla posizione:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono proporzionali,} \\ |x|+|y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



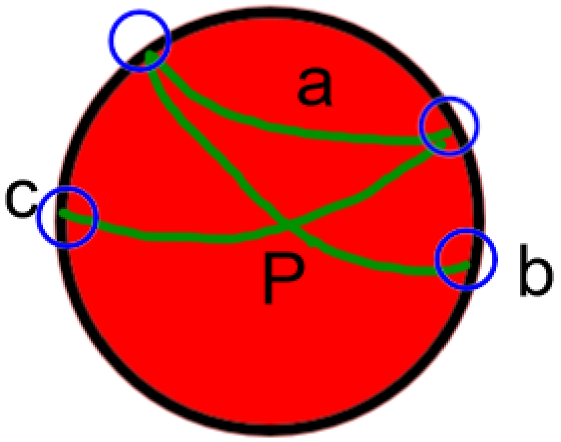
Chiusa la parentesi sui concetti di distanza e di sistemi di coordinate, ci dobbiamo soffermare un istante anche sul parallelismo delle rette: esistono veramente rette che restano indefinitamente alla stessa distanza, senza mai incontrarsi? Perché questo possa succedere, occorrerebbe che lo spazio fosse illimitato e immutabile in ogni direzione, rigido, in sostanza lo spazio Kantiano, quello delle teorie Newtoniane della fisica classica.

La teoria della Relatività Ristretta di Einstein, pubblicata nel 1905 quando il fisico svizzero aveva 26 anni, necessitò di un nuovo contesto, lo spazio-tempo, in cui ogni punto è caratterizzato da tre coordinate spaziali e da una quarta, il tempo, che, diverso da punto a punto, impedisce di capire se due eventi che avvengono in due posizioni differenti siano contemporanei e rende anche impossibile la trasmissione istantanea di qualunque tipo di perturbazione. E non è ancora tutto, perché Einstein intuì che le masse incurvavano lo spazio-tempo. Ma due rette che sono parallele su una superficie piana continuano ad esserlo se questa si deforma come un lenzuolo sul quale viene appoggiato un oggetto pesante? Si può parlare ancora di parallelismo, purché se ne modifichi la definizione, anzi se si trasforma addirittura la definizione stessa di retta. Vedo di chiarire che cosa intendo dire. Non è detto che lo spazio sia quello che percepiscono i nostri sensi. Noi siamo esseri tridimensionali e ci rappresentiamo uno spazio tridimensionale. Ma se fossimo piatti, il nostro universo sarebbe per noi esso stesso una superficie piatta, non saremmo in grado di immaginare un piano che si curva nello spazio tridimensionale. Queste e altre riflessioni spinsero alcuni matematici nel XVIII e nel XIX secolo a studiare quello che poteva accadere supponendo che non fosse valido il quinto postulato di Euclide, quello che, nella formulazione nota scolasticamente, afferma che da un punto esterno a una retta è possibile tracciare una e una sola retta parallela a quella data. Gauss, Lobacevskij, Bolyai, Klein, Riemann, Poincaré, proposero modelli geometrici nei quali da un punto esterno a una retta si potevano tracciare infinite parallele a quella data, oppure nessuna, dando origine alle geometrie non euclidee che garantirono lo spazio matematico per lo sviluppo della teoria della relatività di Einstein. Quando noi pensiamo a due rette parallele come due linee sempre alla stessa distanza e che non si incontrano mai, immaginiamo un mondo piatto che si estende all'infinito, ma se il nostro mondo fosse la superficie di una sfera e due persone si muovessero a partire dal suo equatore su due linee inizialmente parallele, cioè su meridiani perpendicolari alla linea equatoriale, alla fine si incontrerebbero in uno dei due poli, cioè le due parallele in questa situazione si unirebbero.



Sulla sfera due rette parallele che si incontrano

Nel modello iperbolico di Poincaré, lo spazio è costituito dai punti interni a un disco e le rette sono o diametri senza gli estremi, oppure archi di circonferenze, anche questi privati degli estremi, ortogonali a quella che delimita lo spazio: in questo mondo da un punto esterno a una retta si possono tracciare infinite parallele a quella data e la somma degli angoli interni di un triangolo è inferiore a 180°.



Nel modello di Poincaré le due rette passanti per P sono entrambe parallele alla retta *a*

Le tre coordinate spaziali x,y,z che sono necessarie per definire la posizione di un corpo in una stanza, indicandone la distanza da tre pareti, che ci consentono di stabilire univocamente dove il corpo si trovi, non sono più sufficienti quando dobbiamo seguire il corpo in movimento seguendo le leggi della relatività. Nello spazio-tempo, i punti di coordinate cartesiane diventano eventi e si deve stabilire come si trasforma una distanza euclidea tra punti in una distanza non euclidea tra eventi. Si deve stabilire inoltre il legame tra le coordinate spazio-temporali di fenomeni che vengono osservati da due sistemi di riferimento in moto relativo, come una pallina che cade su un treno che sta passando davanti a noi, che in quel momento ci troviamo sulla banchina della stazione. A queste trasformazioni tra un sistema e l'altro aveva già pensato Galileo. A cavallo tra il XIX e il XX secolo, il fisico olandese Hendrik Lorentz le generalizzò a sistemi di riferimento in moto relativo anche a velocità paragonabili a quelle della luce. In forma vettoriale sono espresse dalle relazioni

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c^2}\right) \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{v}\left[(\gamma-1)\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{v^2} - \gamma t\right] \end{aligned}$$

nelle quali c indica la velocità della luce, il vettore $\vec{x}$ rappresenta le tre coordinate spaziali e γ è un coefficiente dato da

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

che possiamo assumere uguale a 1 per velocità molto più piccole di quelle della luce, nel qual caso le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasformazioni galileiane, di componenti:

$$\begin{cases} \overrightarrow{x'} = \vec{x} + \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

in cui v è la velocità di un riferimento rispetto all'altro e il tempo resta ovunque lo stesso.

Proprio perché in cinematica classica il tempo resta lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale[2], è immediato stabilire ad esempio se due eventi siano simultanei o se un corpo stia ruotando oppure no, basta controllare se gli angoli cambiano o meno con il tempo, che in questo ambito classico

---

[2] Cioè un riferimento in cui vale il principio di inerzia: *un corpo non soggetto a forze o è fermo o si muove dii moto rettilineo uniforme.* Un riferimento che si muove con velocità costante e senza ruotare rispetto a un riferimento inerziale è anch'esso inerziale. La Terra, pur ruotando, può essere considerata con una certa approssimazione un riferimento inerziale.

è ovunque lo stesso. In cinematica relativistica, dove il tempo cambia punto per punto, le cose si complicano, nonostante che le proprietà fisiche siano indipendenti dal sistema di coordinate scelto.

Nello spazio-tempo di Minkowski, colui che per primo pensò che il tempo potesse essere considerato, da un punto di vista matematico, alla stessa stregua delle coordinate spaziali, la distanza deve tener conto anche di questa quarta coordinata temporale. Una linea che unisce due punti diventa allora una *linea oraria* che descrive l'evoluzione anche temporale, oltre che spaziale, di una particella.

Nel 1922, all'età di 21 anni, Enrico Fermi pubblicò il suo primo risultato importante: *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, in cui introdusse le coordinate[3] necessarie per descrivere ciò che avviene in prossimità di una linea oraria, o linea di universo, attraverso coordinate determinate rispetto alla linea stessa. La loro espressione è così complessa che per forza di cose devo indirizzare chi fosse incuriosito a scritti specifici universitari. Pur essendo meno importante dei risultati sul nucleo atomico che gli avrebbero procurato fama mondiale e il Premio Nobel, l'articolo merita di essere ricordato per capire la portata della mente del giovane fisico che con questo lavoro mostrò anche incredibili abilità matematiche e una immaginazione che si spingeva ben oltre l'esperienza sensibile.

Fine prima parte. Continua…

Riferimenti

http://operedigitali.lincei.it/rendicontiFMN/rol/visart.php?lang=it&type=mat&nome=Enrico&cognome=Fermi

[3] Poi chiamate coordinate di Fermi