

ALESSIO FIGALLI e il TRASPORTO OTTIMALE



Alessio Figalli ha vinto la medaglia Fields 2018. È stato il secondo italiano a ricevere il prestigioso riconoscimento, istituito nel 1926 dall'Unione Matematica Internazionale e conferito ogni quattro anni a due matematici che non abbiano compiuto 40 anni. Il primo italiano a ricevere l'equivalente per la matematica del premio Nobel fu Enrico Bombieri, nel 1974. Bombieri attualmente insegna negli Stati Uniti, all'Institute for Advanced Studies di Princeton, ma, come Figalli, ha trascorso degli anni alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Bombieri ne è stato docente, dal 1974 al 1977 e Figalli studente, dal 2002 al 2006. Ha bruciato le tappe, Alessio Figalli, conseguendo la laurea triennale in matematica alla Normale in soli due anni, nel novembre 2004. Terminata la specialistica, nell'ottobre del 2007 ha conseguito il dottorato di ricerca, in un solo anno, svolgendo il secondo semestre di perfezionamento all'École Normale Supérieure di Lione. Nel 2011, a soli 27 anni, era già professore ordinario a Austin, Texas, negli Stati Uniti. Dal 2016 occupa una prestigiosa cattedra al Politecnico di Zurigo, dove Einstein fu studente e docente.

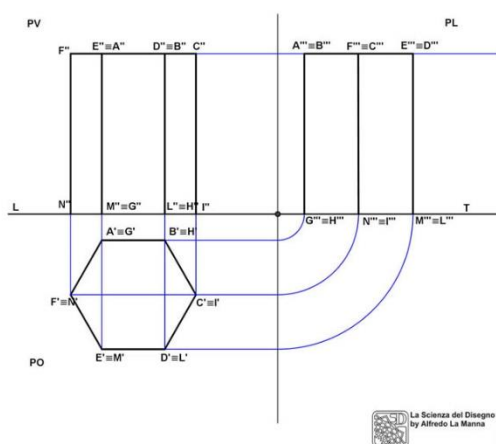
Figalli, nato a Roma il 2 aprile 1984, dove ha frequentato il Liceo Classico "Vivona", è stato premiato "per i suoi contributi al trasporto ottimale, alla teoria delle equazioni alle derivate parziali e alla probabilità".

Carlo Petronio, direttore del Dipartimento di Matematica di Pisa, si è complimentato con il giovane matematico "per essersi distinto a livello internazionale, testimoniando ancora una volta l'alto livello della formazione che gli studenti ricevono a Pisa". Luigi Ambrosio, docente di Figalli alla

Normale, lo ha descritto come un «problem solver, di eccezionale talento», capace di «velocità e profondità nell'assimilazione dei lavori dei matematici che ci hanno preceduto, inventiva» e con una «personalità, al tempo stesso carismatica e di grande equilibrio, che lo rende un collega benvoluto e stimato da tutto il nostro ambiente e un ambito collaboratore nelle ricerche».



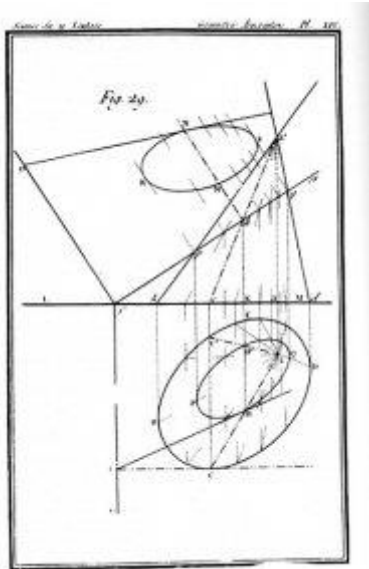
Il problema del trasporto ottimo, per il quale la Scuola Normale Superiore di Pisa costituisce uno dei centri di ricerca di eccellenza mondiale, fu posto per la prima volta nel 1781 dal matematico francese Gaspard Monge¹, amico fidato di Napoleone Bonaparte e inventore della geometria descrittiva e del metodo di Monge, o delle proiezioni ortogonali, metodo che viene insegnato a scuola per rappresentare nel piano un solido tridimensionale.



Proiezioni ortogonali di un prisma a base esagonale

¹ Una curiosità: il matematico francese Cédric Villani, medaglia Fields nel 2010, ha chiamato Gaspard il suo computer. Su Villani è già stato scritto su studiomatematica, all'indirizzo <http://studiomatematica.altavista.org/documenti/amante%20matematica.pdf> e all'indirizzo <http://studiomatematica.altavista.org/documenti/Il%20teorema%20vivente.pdf>

Nel lavoro *Memoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Monge si chiese come poter portare la terra di una pila (déblais) in una buca (remblais) con il minimo lavoro. Questo, che è un classico problema di calcolo delle variazioni, fino al XX secolo non ha avuto soluzione a causa della mancanza di strumenti matematici adatti ad affrontare il problema.



Una tavola del trattato di Monge

Il matematico russo Kantorovic, che fu il primo matematico a vincere il premio Nobel per l'economia, nel 1975², favorì alcuni sviluppi del problema del trasporto nel 1941, senza conoscere il lavoro di Monge. Il problema del trasporto ottimale è così attualmente anche chiamato "problema di Monge-Kantorovich".

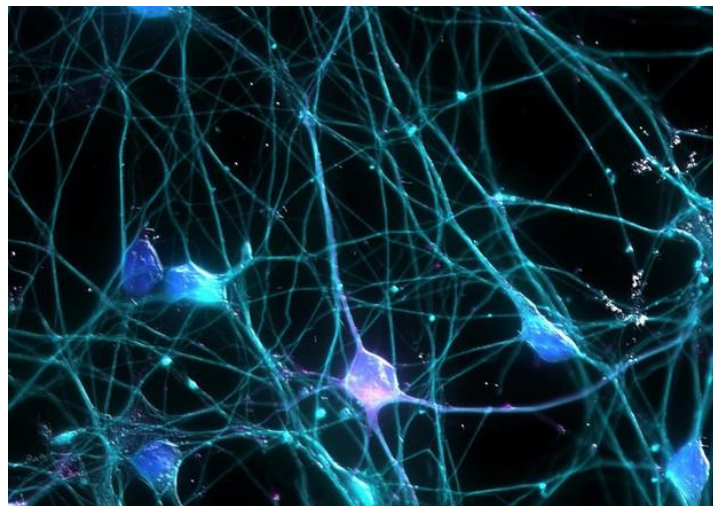
Dopo qualche anno di silenzio, ulteriori espansioni si ebbero allorché alcuni matematici, studiando ambiti diversi, si imbattono nuovamente in questo problema di ottimizzazione. Nella storia della scienza, qualche volta è successa questa cosa particolare, cioè che studiosi, magari anche di nazionalità diverse e non sempre afferenti allo stesso ambito disciplinare, siano pervenuti contemporaneamente allo stesso risultato, dopo anni di ricerche infruttifere. È come se una determinata struttura matematica fosse presente nella natura, ma rimanesse nascosta in attesa che i tempi diventino maturi per riconoscerla. Allora fiorisce in modo naturale in contesti e in luoghi geografici diversi. Tra i casi più famosi si possono ricordare la scoperta della formula risolutiva delle

² Solo due matematici hanno vinto il premio Nobel per l'economia, Kantorovic e John Nash.

equazioni di terzo grado, gli studi di Newton e di Leibniz per l'analisi infinitesimale e la nascita delle geometrie non euclidee.

Per quanto concerne il problema del trasporto ottimo, è accaduto che Felix Otto, matematico tedesco, interessato alle equazioni dei mezzi porosi, Yann Brenier, francese, che si occupava di fluidodinamica, Robert McCann, canadese, che studiava disuguaglianze geometriche e funzionali, siano pervenuti contemporaneamente all'idea che il trasporto ottimale potesse essere fondamentale nei loro settori di ricerca.

In questo problema, generalizzando la formulazione iniziale di Monge, si tratta di capire come una assegnata distribuzione di massa possa essere trasportata in una configurazione diversa, con il minimo costo complessivo. Questo ramo della matematica trova innumerevoli applicazioni a sistemi complessi che interessano numerosi ambiti, dalle scienze ambientali, alla medicina, alle scienze economiche. Si può pensare all'ottimizzazione di reti di trasporto, a problemi di traffico, a ottimizzazioni di forma e densità di materiali, a distribuzioni di massa per ottimizzare la resistenza di una struttura, alla finanza matematica, alla computer graphics ed ad altro ancora.



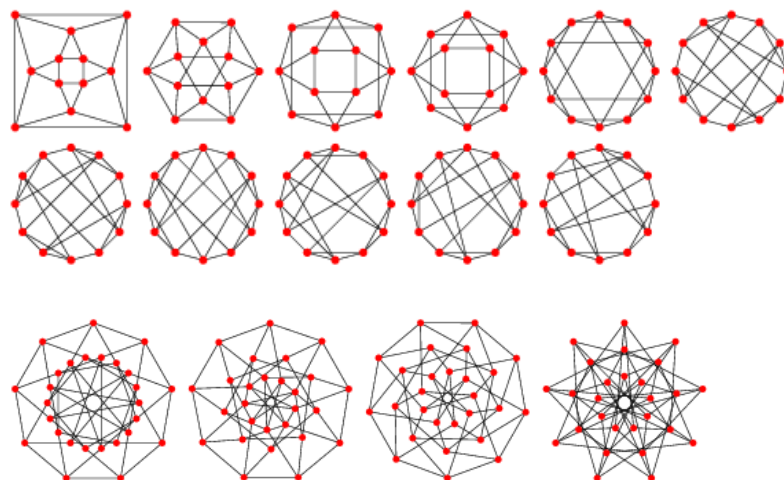
Neuroni della corteccia cerebrale

Fonte: http://www.ansa.it/canale_scienza_tecnica/notizie/biotech/2017/05/30/nel-cervello-i-neuroni-nostradamus-prevedono-il-futuro_00459dee-5618-4bd4-bb5a-2865f4df6191.html

Poiché si tratta, come si è detto, di minimizzare il costo complessivo del trasporto di una determinata massa da una posizione ad un'altra, un quesito da porsi è se sia preferibile portare tutta la massa insieme, oppure suddividerla in "pacchetti" più piccoli. Ad esempio, supponiamo di dover distribuire oggetti a persone che li abbiano ordinati. È più conveniente che uno stesso corriere passi da tutte le case, oppure che più corrieri percorrano strade differenti? Il corriere riesce a passare da tutte le case percorrendo le strade una sola volta?

Un classico problema di ottimizzazione è proprio il problema decisionale del commesso viaggiatore: dato un grafo³ G , cioè un insieme di punti, detti nodi, e di percorsi che li uniscono, che sono detti archi, e un intero positivo k , stabilire se G contiene un ciclo hamiltoniano⁴ in cui la somma dei costi degli archi è minore o uguale a k .

Per percorsi con un numero limitato di nodi, si può procedere anche manualmente, tenendo conto che il problema di toccare tutti i nodi passando una sola volta sugli archi ha soluzione se tutti i nodi sono di ordine pari (cioè se essi sono collegati a un numero pari di archi) o se solo due di essi sono dispari.



Grafi in cui si chiede se è possibile toccare tutti i nodi passando una sola volta per i rami che li collegano

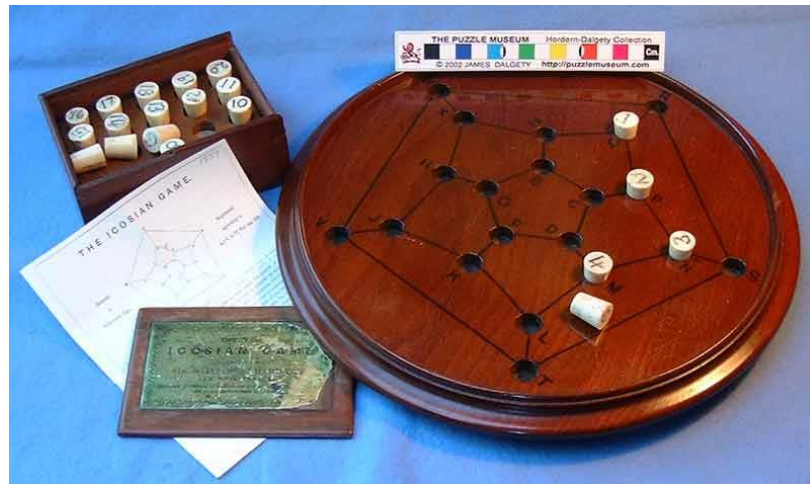
Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/CuboctahedralGraph.html>

³ La teoria dei grafi nacque con Eulero, nel 1736, che si pose il problema di capire se i sette ponti della cittadina di Konisberg, città natale di Kant, potessero essere attraversati una volta sola. Per approfondimenti si rimanda a: Eulero, nella sezione Curiosità di

http://studiomatematica.altervista.org/index.php?option=com_content&view=section&id=5&layout=blog&Itemid=29

⁴ Significa un ciclo che possa essere percorso toccando tutti i suoi nodi e passando una sola volta sui suoi archi

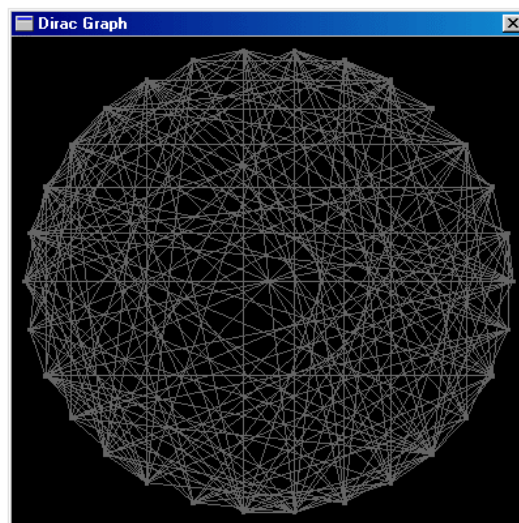
Sono stati realizzati anche dei giochi in cui si deve cercare di percorrere un intero circuito passando una sola volta sulle connessioni. Il più famoso è l' *Icosian Game*, inventato nella metà del XIX secolo proprio da William Hamilton.



L'Icosian Game

Fonte: <https://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm>

Quando il grafo si complica, è chiaro che per risolvere il problema sia indispensabile il sussidio di un computer.



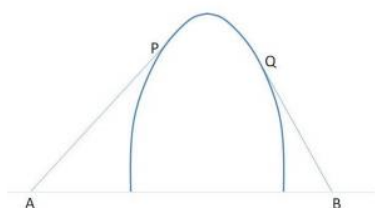
Fonte: <http://www.dharwadker.org/hamilton/>

Per quanto riguarda il trasporto ottimale, Figalli ha dimostrato l'esistenza ed unicità della soluzione, cioè l'esistenza e unicità di un percorso di costo minimo, in alcuni casi particolari. Questo non è l'unico ambito di ricerca di Figalli, i cui studi spaziano dal calcolo delle variazioni alle equazioni alle derivate parziali, dai problemi di Free Boundary⁵ alle matrici random⁶.

Uno dei più pregevoli risultati di Figalli riguarda il cosiddetto problema isoperimetrico, che consiste nel determinare, tra tutte le figure di perimetro assegnato, quella di area massima. Il problema era noto fin dall'antichità. Virgilio narra infatti che Didone, per fondare Cartagine sulle coste dell'Africa settentrionale, avesse chiesto di acquistare un appezzamento di terra dal re locale Iarba e che il re come risposta le dette una pelle di toro perché Didone avrebbe potuto prendere tutta la terra che quella pelle avrebbe potuto racchiudere.

*Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
sorgere la gran cittade e l'alta rocca
della nuova Carthago, che dal fatto
Birsa nomassi, per l'astuta merce
che, per fondarla, fèr di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo
(taurino quantum possent circumdare tergo)⁷.*

⁵ Si tratta di problemi che riguardano il comportamento della superficie di separazione tra due corpi in una deformazione, ad esempio la forma che può assumere un cubetto di ghiaccio mentre si scioglie. Tra i problemi di free boundary uno famoso è il problema dell'ostacolo, in cui si deve determinare la forma assunta da una linea elastica, fissata in due estremi A e B, che deve superare un ostacolo, adagiandosi al suo contorno come in figura (nel tratto PQ), oppure la forma che assume una membrana elastica quando tocca una sfera.



⁶ Sono matrici i cui elementi sono variabili random. Introdotta in matematica statistica intorno al 1930, se ne è iniziato uno studio sistematico attorno agli anni 50. Il matematico ungherese Wigner, premio Nobel nel 1963, le introdusse per spiegare il comportamento statistico di alcuni fenomeni di meccanica quantistica.

⁷ Eneide, libro I, versi 365-369



Ricostruzione del porto di Cartagine

Fonte: <http://www.aracneeditrice.it/pdf/9788895769370.pdf>

La leggenda narra che Didone tagliò la pelle in strisce sottili che congiunse e dispose a formare un semicerchio, con il quale riuscì a racchiudere la massima area possibile. Didone aveva intuito che il cerchio è la soluzione del problema isoperimetrico.



Corrado Domenico Giaquinto (1703-1766), *Arrivo di Enea a Cartagine*. 1740 circa

Fonte: <https://lamemoriadeifenici.wordpress.com/una-collana-per-la-memoria/>

Il problema può essere riformulato anche in una versione “simmetrica”, cioè affermando che, tra tutte le figure di area assegnata, l’unica con perimetro minimo è il cerchio. Ma che forma assume una figura che ha una lunghezza molto vicina a quella della circonferenza alla quale

corrisponde l'area assegnata? Figalli, assieme a Maggi e Pratelli, nel 2010, ha enunciato un teorema che illustra quello che accade e ha dimostrato questo teorema con il trasporto ottimo. Il risultato può essere applicato a superfici in spazi con qualsiasi dimensione e anche a superfici anisotrope, cioè con distribuzioni di massa non regolari.

Nello spazio, la minima superficie per un volume assegnato corrisponde a quella di una sfera ed è questo il motivo per il quale la tensione superficiale fa sì che le bolle di sapone siano sferiche. Tra gli studi di Figalli troviamo anche la stima sulla deformazione subita da una bolla di sapone o da un cristallo a causa di perturbazioni esterne.



Le perturbazioni meteorologiche seguono anch'esse la legge del trasporto ottimo: ogni particella che compone una nuvola si sposta in modo da minimizzare l'energia e Figalli ha dimostrato matematicamente che le equazioni che governano la meteorologia si possono risolvere con le formule del trasporto ottimale.



Dal 14 al 17 gennaio 2019 Alessio Figalli sarà festeggiato alla Scuola Normale Superiore di Pisa con un convegno a lui dedicato.

Sono stati consultati:

<https://www.unipi.it/index.php/news/item/13024-alessio-figalli-laureato-dell-unipi-ex-allievo-della-scuola-normale-vince-la-medaglia-fields>

<https://video.repubblica.it/tecno-e-scienze/fields-figalli-dalle-nuvole-alla-matematica-ecco-cos-e-il-trasporto-ottimale/311661/312300>

<https://www.scienzainrete.it/contenuto/articolo/il-trasporto-ottimale>

<http://normalenews.sns.it/alessio-figalli-medaglia-fields/>

<http://bollettinonormale.sns.it/alessio-figalli-e-medaglia-fields/>

<http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.html?lang=fr>

<https://people.math.ethz.ch/~afigalli/research>

<https://www.mestierideimatematici.it/it/node/113>

https://www.ilmessaggero.it/societa/persona/figalli_romano_nobel_matematica-3890317.html

http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.html?id_forum=5031&lang=fr

[http://web.dmi.unict.it/sites/default/files/files/Maugeri\(1\).pdf](http://web.dmi.unict.it/sites/default/files/files/Maugeri(1).pdf)

<http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/tieni-la-mente-aperta-alessio-figalli-intervista-luis-caffarelli/>

http://gfmt.dimai.unifi.it/attachments/article/39/GFMT-2018_Modica.pdf

<https://alabis.wordpress.com/2011/04/20/il-problema-isoperimetrico-da-didone-a-emma-castelnuovo/>

<http://profs.sci.univr.it/~zuccher/downloads/slides-PLS201415.pdf>

https://www.politesi.polimi.it/bitstream/10589/35901/1/2011_12_Salaris.pdf

<file:///C:/Users/Utente%20Microsoft/Downloads/5963-Saltini-triennale.pdf>

[file:///C:/Users/Utente%20Microsoft/Downloads/10869-Minniti-triennale%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Utente%20Microsoft/Downloads/10869-Minniti-triennale%20(1).pdf)

<http://tesi.cab.unipd.it/54695/>

<https://people.math.ethz.ch/~afigalli/lecture-notes-pdf/A-transportation-approach-to-universality-in-random-matrix-theory.pdf>

<http://m.docente.unife.it/michele.miranda/materiale-didattico/tesi-di-laurea/tesi-di-lauree-triennali-in-matematica/il-problema-isoperimetrico>

<http://www2.unibas.it/saliani/Lincei/isoperimetrici17.pdf>

<https://alabis.wordpress.com/2011/04/20/il-problema-isoperimetrico-da-didone-a-emma-castelnuovo/>

http://dm.unife.it/matematicainsieme/schiume/perc_mate01.htm

<https://www.rsi.ch/rete-due/programmi/cultura/il-giardino-di-albert/La-scienza-in-una-bolla-di-sapone-314485.html>

https://www.repubblica.it/scienze/2018/08/01/news/il_trasporto_ottimale_didone_e_il_meteo_ecco_perche_figalli_ha_vinto_la_medaglia_fields-203132367/

https://www.repubblica.it/scienze/2018/08/01/news/chi_e_alessio_figalli_il_matematico_seconda_medaglia_fields_italiana-203123315/