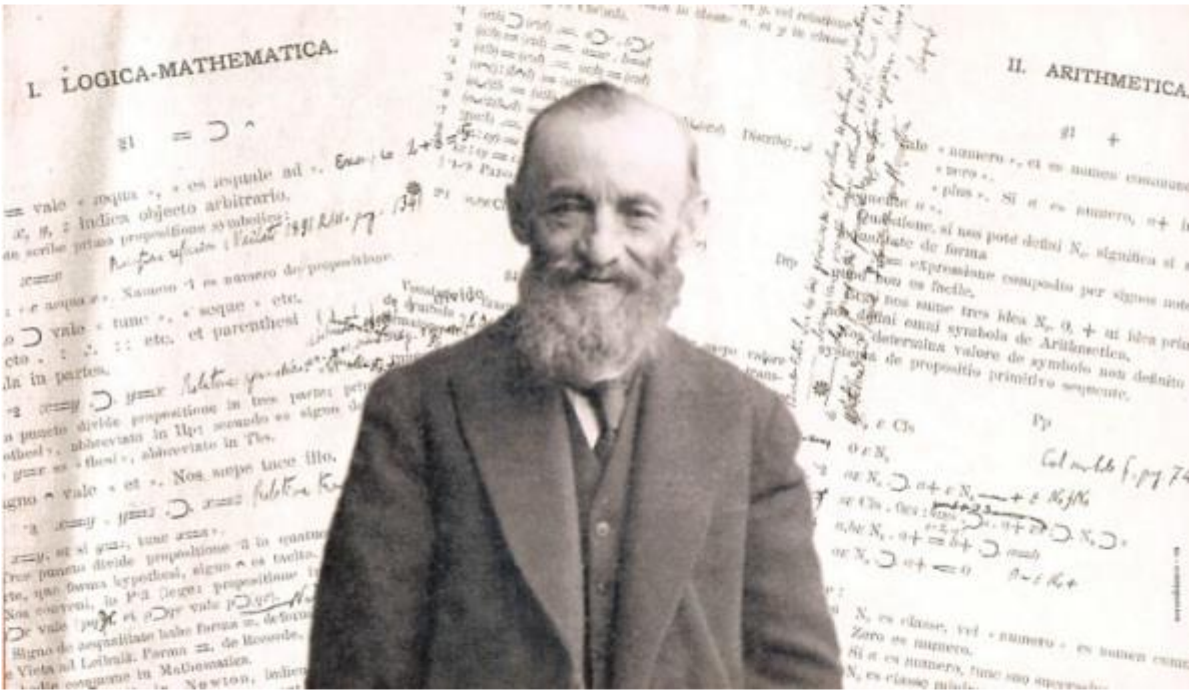
Giuseppe Peano: «Vi insegnerò a trasformare la matematica in pane»



Tu credi che a me tuo pensier mei
da quel ch'è primo, così come raia
da l'un, se si conosce, il cinque e 'l sei[1]

Giuseppe Peano è stato uno dei più grandi matematici vissuti a cavallo tra il XIX e il XX secolo. Nacque in una fattoria di Spinetta, in provincia di Cuneo, il 27 agosto 1858.

Casa natale di Giuseppe Peano

Per farlo studiare nel modo migliore, i genitori comprarono una casa a Cuneo, evitando al piccolo di Peano i cinque più cinque chilometri che percorreva ogni giorno a piedi per recarsi a scuola

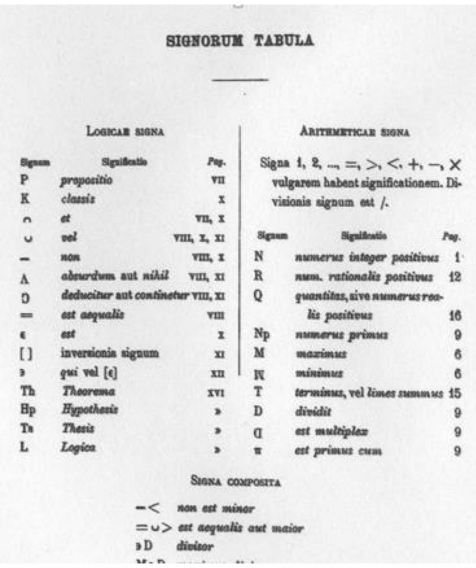
[1] Canto XV del Paradiso, versi 55-57. Sono le parole di Cacciaguida a Dante.

e tornare a casa. Grazie all'interessamento di uno zio che ne aveva riconosciuto le capacità, frequentò il liceo classico a Torino e nella stessa città si laureò in matematica nel 1880. Nel 1890 iniziò la docenza di calcolo infinitesimale. "La vita semplice e modesta di G. Peano fu congiunta con la frugalità della mensa, che tiene lontano dai medici e dalle medicine. Questo gli ha permesso, settuagenario, di essere diritto, sano ed agile molto più di qualche giovane; e di affrontare con animo tranquillo anche viaggi molto lunghi, come quello di andare, nel 1924, in America e di giungere a Toronto nel Canadà ed a New York, negli Stati Uniti, per partecipare ad un congresso internazionale di matematici. Con un abito modesto, con l'aspetto buono e sereno, con la barba a pochi peli bianchi, non era difficile incontrarlo, sotto i portici di piazza Castello o di via Po, a Torino, in modo speciale quando erano messi in vendita i giornali di cui era lettore appassionato. E ciò fino al giorno già ricordato della sua morte improvvisa: 20 aprile 1932. Nello stesso ultimo giorno della sua vita Egli mi scriveva, e faceva la sua lezione nell'Università di Torino. Nessuno poteva prevedere il suo imminente decesso, perché ha conservato sino alla fine la sua intelligenza straordinaria e la sua grande operosità".[2]

I maggiori contributi per i quali ricordiamo Peano sono stati la sistemazione rigorosa dell'analisi (contemporaneamente a Weierstrass, Cauchy, Dini), l'assiomatica dei numeri naturali, la scoperta di una curva continua che riempie un quadrato e il teorema di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie. Intorno al 1910 si dedicò anche all'invenzione di una lingua universale che chiamò *latino sine flexione*, ottenuto semplificando il latino tradizionale con l'eliminazione di tutte le flessioni grammaticali. Viene ritenuto il padre della logica matematica, assieme a Gottlob Frege. Per tale disciplina ideò un simbolismo matematico per semplificare le espressioni. Ad esempio fu introdotto da Peano il simbolo di appartenenza ad un insieme, per il quale il matematico usò una "ε", iniziale delle parola greca " ἐστί "[3], che fu poi trasformata da Bertrand Russel in "$\in$" per non essere confusa con la "ε" che indicava una grandezza piccola a piacere. Utilizzò inoltre simboli per indicare che un insieme era contenuto in un altro, oppure che lo conteneva, e simboli per la congiunzione logica e la disgiunzione logica. Tra gli estimatori del lavoro di Peano, lo stesso Bertrand Russel fu il più notevole: «Nella mia attività filosofica vi è una svolta fondamentale: negli anni 1899-1900, adottai la filosofia dell'atomismo logico e il metodo di Peano nell'ambito della logica matematica. Ciò rappresentò una trasformazione tanto grande da rendere il mio lavoro precedente,

[2] Ugo Cassina, cfr. http://www.comune.cuneo.gov.it/fileadmin/comune_cuneo/content/amm_organiz/cultura/centro_doc_territoriale/fondo_peano/Catalogo_Peano.pdf
[3]Terza persona singolare del verbo essere: "è".

a eccezione di quello puramente matematico, irrilevante rispetto a tutto ciò che feci in seguito. Il cambiamento avvenuto in quegli anni rappresentò una rivoluzione; i cambiamenti successivi ebbero il carattere di una evoluzione»[4].



SIGNORUM TABULA

LOGICAE SIGNA

Signum	Significatio	Pag.
P	*propositio*	VII
K	*classis*	X
∩	*et*	VII, X
∪	*vel*	VIII, X, XI
−	*non*	VIII, X
Λ	*absurdum* aut *nihil*	VIII, XI
Ɔ	*deducitur* aut *continetur*	VIII, XI
=	*est aequalis*	VIII
ε	*est*	X
[ ]	inversionis signum	XI
∍	*qui* vel [ε]	XII
Th	*Theorema*	XVI
Hp	*Hypothesis*	»
Ts	*Thesis*	»
L	*Logica*	»

ARITHMETICAE SIGNA

Signa 1, 2, ..., =, >, <, +, −, × vulgarem habent significationem. Divisionis signum est /.

Signum	Significatio	Pag.
N	*numerus integer positivus*	1
R	*num. rationalis positivus*	12
Q	*quantitas*, sive *numerus realis positivus*	16
Np	*numerus primus*	9
M	*maximus*	6
Ɱ	*minimus*	6
T	*terminus*, vel *limes summus*	15
D	*dividit*	9
ɑ	*est multiplex*	9
π	*est primus cum*	9

SIGNA COMPOSITA

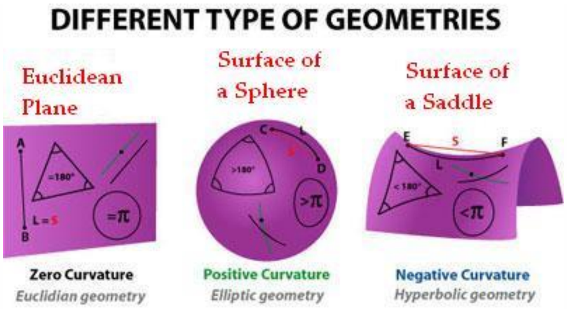
−<	*non est minor*
=∪>	*est aequalis aut maior*
∍D	*divisor*

Tavola dei simboli introdotti da Peano

L’assiomatica dei numeri naturali

Euclide edificò la geometria su fondamenta costituite da assiomi, o postulati, cioè affermazioni assunte come vere a priori, da cui si ergevano e si ramificavano le proposizioni dimostrabili con il metodo ipotetico deduttivo. La scoperta delle geometrie non euclidee mostrò che la scelta degli assiomi non era univoca, ma che i postulati iniziali e gli enti sui quali basare l’intero costrutto geometrico possono essere scelti senza tener conto di quello che i limiti imposti dai nostri sensi ci fanno ritenere reale. In sostanza l’evidenza dello spazio che ci circonda potrebbe non coincidere con la realtà; i postulati sui quali si basano le proposizioni matematiche per caratterizzare lo spazio possono essere costruzioni mentali, differenti dalla realtà oggettiva, che noi, esseri tridimensionali, non riusciamo a percepire.

[4] Bertrand Russell, *La mia filosofia* , trad. di Francesca Pasquini, Newton Compton, Roma 1995, p. 14 (edizione originale: *My Philosophical Development* , George Allen and Unwin, London 1959).



Fonte: www.blendspace.com

Gli enti primitivi, cioè il punto la retta, il piano, lo spazio, possono essere diversi da quelli che abbiamo sempre ritenuto tali e i postulati essere differenti da quelli pensati da Euclide nel III secolo a.C., purché soddisfino tre requisiti:

1. Indipendenza (ciò che afferma un assioma non deve dipendere da quanto affermato da un altro)
2. Non contraddittorietà (due assiomi distinti non possono affermare qualcosa che sia tra essi in contraddizione)
3. Completezza (dal sistema di assiomi scelto si deve poter ricavare e dimostrare ogni proposizione della geometria in questione).

Così nella geometria ellittica introdotta da Riemann le rette sono geodetiche di una sfera e da un punto esterno a una retta non si possono tracciare rette parallele alla retta data e nella geometria iperbolica introdotta da Gauss, Bolyai e Lobachevskij le rette sono corde senza estremi di un cerchio e da un punto esterno a una retta data si possono tracciare infinite parallele.

Alla stessa stregua di quanto realizzato per la geometria, Peano, sfruttando un'idea di Dedekind[5], pensò di basare l'insieme dei numeri naturali su assiomi assunti come veri, proposizioni

---

[5] Richard Dedekind (1831 – 1916), grande matematico tedesco, allievo di Gauss e amico di un altro straordinario matematico, Peter Dirichlet, di cui un suo studente così scrisse: *siede all'alta scrivania di fronte a noi, poggia la testa su entrambe le mani e dentro le sue mani vede un calcolo immaginario che ci legge ad alta voce; quel calcolo lo comprendiamo come se lo vedessimo anche noi*. Alla morte di Dirichlet, Dedekind ne curò e pubblicò i risultati.

accettate incondizionatamente senza richiederne una dimostrazione. Tra tutte le proprietà che caratterizzano i numeri naturali, Peano scelse il minor numero necessario perché fossero indipendenti e non in contraddizione tra loro e per poter ricavare da esse tutte le altre proprietà dei numeri naturali. I cinque assiomi di Peano sono:

(1) È dato un elemento "speciale", 0. (ovvero "0 è un numero naturale")

(2) È data una funzione S : **N** → **N** (ovvero "il successivo di un numero naturale è un numero naturale")

(3) S è iniettiva (ovvero "due numeri che hanno successivi uguali sono uguali")

(4) 0 non appartiene all'immagine di S (ovvero "0 non è successore di alcun numero")

(5) Dato un sottoinsieme A ⊆ **N**, se 0 ∈ A e S(A) ⊆ A allora A = **N** (questa proprietà costituisce il cosiddetto **Principio di induzione**: *sia $\mathcal{P}$ una proposizione sui numeri naturali. Se $\mathcal{P}(0)$ è vera e se l'essere vera $\mathcal{P}(n)$ implica la verità di $\mathcal{P}(n+1)$, allora $\mathcal{P}$ è vera per ogni numero naturale).*

Il principio di induzione è un valido aiuto per alcune dimostrazioni matematiche. Ad esempio si può dimostrare per induzione che la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali è dato dalla formula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

oppure che per ogni

$n \geq 1$ il polinomio $x^{2n} - 1$ è divisibile per $x^2 - 1$.

Ma anche che $n! \geq 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$, $n \in N$[6].

O dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall n \in N, x \geq -1.$$

[6] Con il simbolo n! si indica il prodotto di tutti i numeri naturali minori o uguali a n.

“Il tentativo di bandire l’intuizione geometrica dai fondamenti della matematica è una delle costanti della filosofia della matematica del 1900”[7] e gli assiomi di Peano costituiscono le fondamenta per edificare l’insieme dei numeri naturali a prescindere dalla loro visualizzazione geometrica, che li immagina in successione da sinistra verso destra sulla retta orientata. Tuttavia è bene precisare che postulati scelti individuano sì l’insieme dei numeri naturali, ma non univocamente, bensì “a meno di isomorfismi”. Questo significa che se la terna (M, u, T) soddisfa gli assiomi così come risultano soddisfatti da ($\mathbf{N}$, 0, S), allora esiste una corrispondenza biunivoca $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow M$ tale che $\varphi(0) = u$ e $\varphi \circ S = T \circ \varphi$.

Il metodo assiomatico non è solo una pratica, è anche una filosofia della matematica, osserva Gabriele Lolli[8], concludendo che *in ogni caso l’organizzazione assiomatica delle teorie, diventata ormai, come ha osservato Dieudonné*[9]*, una necessità assoluta, nasconde problemi insospettati che in parte avranno risposta dalla ricerca logica, in parte resteranno, a ricordare che quella assiomatica non è la fondazione stabile, rassicurante e definitiva che si potrebbe cercare, se si pensa di doverla cercare.*

Fine prima parte, continua…

---

[7] Alessandro Berarducci, 2013, all’indirizzo: http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/2012-13ETI/Insiemi2012-13/insiemi2013.pdf

[8] Lolli è docente di Filosofia della Matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa. (Cfr. http://homepage.sns.it/lolli/dispense11/11-cap6.pdf)

[9] Jean Dieudonné, 1906 – 1992, matematico francese, scrisse che *a ogni matematico che abbia a cuore la probità intellettuale s’impone ormai la necessità assoluta di presentare i propri ragionamenti in forma assiomatica* (cfr. http://homepage.sns.it/lolli/dispense11/11-cap6.pdf)