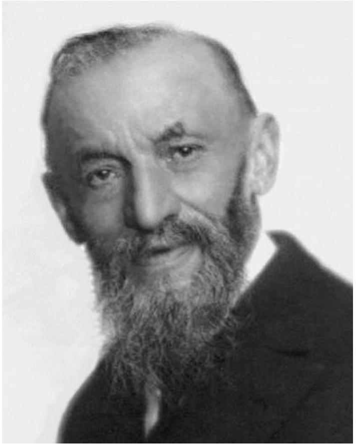
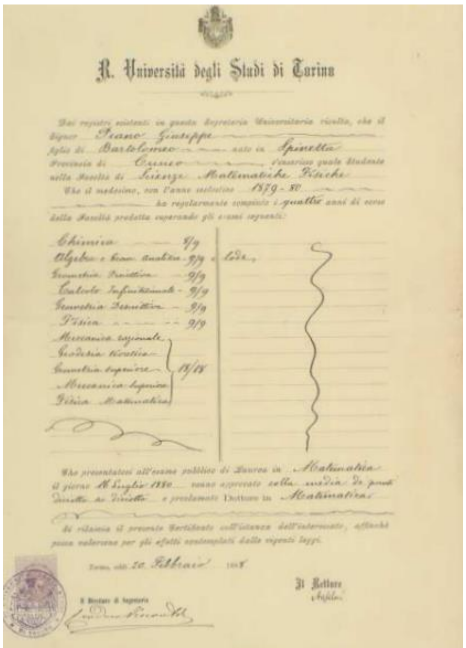
Giuseppe Peano: «Vi insegnerò a trasformare la matematica in pane»

Seconda parte



«Un giorno, avevo appena comprato la Critica della Ragion Pura e l'avevo con me. Quella volta non scherzò. Aprì il libro e lesse (in una nota della prefazione): «il primo che dimostrò il triangolo isoscele». Scattò. Prese un foglio, e con la sua bella scrittura forte, nervosa, legata, scrisse: «Kant, Critica, versione Gentile, Bari 1924, p. 17. Non si dimostra il triangolo isoscele; se ne possono enumerare le proprietà, e dimostrarle, cioè dedurle da proposizioni precedenti (teoremi, postulati, assiomi). Il traduttore cita Euclide I 5. Kant però aveva detto triangolo equilatero». Potevo afferrare anch'io l'imprecisione, anzi, la grossolana inesattezza. Ma a questo punto si apriva l'abisso - mi pareva infatti incolmabile - che separava i due mondi: la scienza e la filosofia»[1].



R. Università degli Studi di Torino

Peano Giuseppe

Bartolomeo — Spinetta

Cuneo

Scienze Matematiche Fisiche

1879-80

quattro

Chimica 9/9

Fisica 9/9

Il Rettore

Il certificato di Laurea in Matematica di Peano[2]

[1] Lalla Romano, *Una giovinezza inventata,* Einaudi 1995.

[2]http://www.comune.cuneo.gov.it/fileadmin/comune_cuneo/content/amm_organiz/cultura/centro_doc_territoriale/fondo_peano/Catalogo_Peano.pdf

I fondamenti della geometria

La ricerca di Peano sull'assiomatizzazione della matematica non si limitò ai numeri naturali; Peano studiò anche per la geometria una struttura completa e coerente, cercando un minimo numero di enti geometrici da considerare come primitivi, cioè da assumere senza una definizione, e un minimo numero di proposizioni da accettare come vere, a partire dalle quali dimostrare ogni altra proprietà geometrica[3]. Per quanto riguarda la geometria, per secoli gli assiomi proposti da Euclide furono ritenuti gli unici possibili per poter dedurre ogni altra caratteristica delle figure. Le geometrie non euclidee rappresentarono un primo passo avanti, mostrando che il quinto postulato, quello sull'esistenza e unicità della parallela ad una retta assegnata, poteva essere sostituito con una sua negazione, e realizzare lo stesso un sistema di proposizioni logiche per rappresentare in modo rigoroso uno spazio, anche se differente a quello che i nostri sensi percepiscono.

Nel 1882 ci fu un'ulteriore evoluzione riguardante gli assiomi euclidei. In un libro intitolato *Vorlesungen ùber neuere Geometrie*, il matematico tedesco Moritz Pasch, mostrò che l'insieme dei postulati proposto da Euclide non era completo: esisteva una proposizione che non poteva essere dedotta dall'insieme di assiomi individuati dal matematico greco. Nello specifico la proposizione asseriva che nel piano, se una retta interseca il lato di un triangolo e non passa per uno dei vertici, allora necessariamente deve intersecare uno degli altri due lati. Pasch rielaborò l'opera euclidea e stabilì che erano necessari alcuni enti primitivi. Euclide aveva definito punti e linee: *punto è ciò che non ha parti*, *linea è lunghezza senza larghezza*. Pasch osservò che questo presupponeva il ricorso ad altri concetti, le parti, la lunghezza, la larghezza, che a loro volta avrebbero dovuto essere definiti, e che era preferibile invece assumere alcuni elementi come primitivi, eventualmente spiegando che cosa fossero, ma senza ricorrere a una definizione rigorosa. Pertanto scrisse che "vengono chiamati punti quei corpi la cui divisibilità non è più compatibile con i limiti della capacità di osservazione". La geometria è per Pasch una scienza naturale e che deve basarsi sull'esperienza: "alla Geometria si possono comunque associare speculazioni di vario genere. Ma le fruttuose applicazioni ottenute continuamente nelle scienze naturali e nella vita pratica, poggiano in ogni caso sul fatto che i concetti

[3] Nel 1889 scrisse *I principi di geometria logicamente esposti* e nel 1894 *Sui fondamenti della geometria*.

geometrici originariamente corrispondono proprio agli oggetti empirici, anche se quelli vengono a poco a poco ricoperti da una rete di concetti artificiali atti a promuovere sviluppi teorici. Ma se fin da principio ci limitiamo al nucleo empirico, la Geometria conserva il carattere di scienza naturale, distinguendosi da altre parti di questa per la necessità di dover trarre dall'esperienza solo un numero assai imitato di concetti e di leggi"[4]. Pasch precisò inoltre che "il processo deduttivo deve essere totalmente indipendente dal significato dei concetti geometrici, così come deve essere indipendente dalle figure". Giuseppe Peano, pochi anni dopo la pubblicazione di *Vorlesungen ùber neuere Geometrie*, precisamente nel 1889, nel saggio *Principii di geometria logicamente esposti* introdusse quel simbolismo che tendeva a rispondere proprio a questa esigenza ("Il segno **1** leggasi *punto*"), eliminando la necessità di ricorrere alle figure e all'interpretazione fisica dei concetti. Ridusse ulteriormente il numero degli enti primitivi[5] e sviluppò il suo impianto con estrema attenzione al rigore logico e formale. Tuttavia "Peano rimase legato a un indirizzo fisico-geometrico in contrapposizione a quello deduttivo-astratto prescindente da ogni interpretazione fisica o intuitività dei postulati. L'obiettivo fondamentale dell'indirizzo fisico-geometrico, il cui moderno fondatore è da ravvisare in Pasch, è dare alla geometria una forma rispondente alle esigenze di rigore maturate nel corso del XIX secolo, ribadendo però l'origine empirica dei concetti base e dei postulati utilizzati."[6]


I
PRINCIPII DI GEOMETRIA
LOGICAMENTE ESPOSTI

SAGGIO
DI
GIUSEPPE PEANO
Professore nella R. Accademia militare
libero docente nella R. Università di Torino.

TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
SUCCURSALI
ROMA
Via del Corso, 216-217
FIRENZE
Via Cerretani, 8
DEPOSITI
PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)
MESSINA
(Daly)
CATANIA
S. Maria al Rosario, 31
(N. Carosio)
1889

---

[4] http://math.unipa.it/~brig/sds/MATERIALI/MATEMATICA/sitofondamenti/introduzione.htm
[5] Peano non considerò tra gli enti primitivi la "porzione di piano" introdotta da Pasch.
[6] Cfr. [1]

La curva di Peano

La curva di Peano è una curva che passa per ogni punto di un quadrato. Matematicamente si tratta di una funzione continua e surgettiva $g : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$. Disegnarla completamente significherebbe colorare di nero tutto il quadrato, per cui, per capire il procedimento seguito da Peano, l'unico modo possibile è quello di iniziare a rappresentarla passo dopo passo, per poi intuire come poi si potrebbe procedere nelle iterazioni successive.

Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.

Par

G. Peano à Turin.

Dans cette Note on détermine deux fonctions x et y, uniformes et continues d'une variable (réelle) t, qui, lorsque t varie dans l'intervalle $(0, 1)$, prennent toutes les couples de valeurs telles que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle, suivant l'usage, *courbe continue* le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe qui passe par tous les points d'un carré. Donc, étant donné un arc de courbe continue, sans faire d'autres hypothèses, il n'est pas toujours possible de le renfermer dans une aire arbitrairement petite.

Adoptons pour base de numération le nombre 3; appelons *chiffre* chacun des nombres 0, 1, 2; et considérons une suite illimitée de chiffres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que nous écrirons

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

(Pour ce moment, T est seulement une suite de chiffres).

Si a est un chiffre, désignons par $\mathbf{k}a$ le chiffre $2 - a$, *complementaire* de a; c'est-à-dire, posons

$$\mathbf{k}0 = 2, \quad \mathbf{k}1 = 1, \quad \mathbf{k}2 = 0.$$

Si $b = \mathbf{k}a$, on deduit $a = \mathbf{k}b$; on a aussi $\mathbf{k}a \equiv a \pmod{2}$.

Désignons par $\mathbf{k}^n a$ le résultat de l'operation $\mathbf{k}$ répétée n fois sur a. Si n est pair, on a $\mathbf{k}^n a = a$; si n est impair, $\mathbf{k}^n a = \mathbf{k}a$. Si $m \equiv n \pmod{2}$, on a $\mathbf{k}^m a = \mathbf{k}^n a$.

Faisons correspondre à la suite T les deux suites

$$X = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots, \quad Y = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

où les chiffres b et c sont donnés par les rélations

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = \mathbf{k}^{a_1} a_2, \quad b_2 = \mathbf{k}^{a_2} a_3, \quad c_2 = \mathbf{k}^{a_1+a_3} a_4, \quad b_3 = \mathbf{k}^{a_2+a_4} a_5, \ldots$$

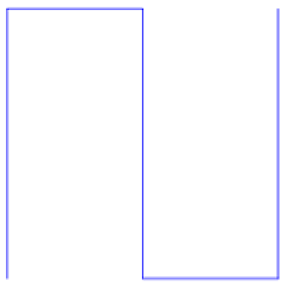
$$b_n = \mathbf{k}^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad c_n = \mathbf{k}^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Giuseppe Peano, 1890 (http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/peano.pdf)

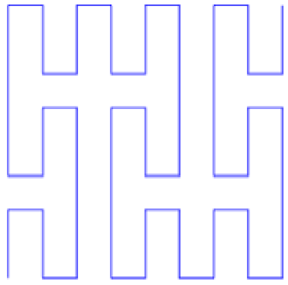
Peano ebbe l'idea[7] di ricorrere alla numerazione in base tre per individuare le coppie (X,Y) che nel quadrato di lato unitario corrispondono ai punti per i quali passa la curva. Le coordinate X e Y sono pertanto numeri decimali compresi tra 0 e 1, con la parte decimale espressa solo dalle cifre 0, oppure 1, oppure 2. Alla prima iterazione sono date da:

X	Y
0,0	0,0
0,0	0,1
0,0	0,2
0,1	0,2
0,1	0,1
0,1	0,0
0,2	0,0
0,2	0,1
0,2	0,2

Rappresentati sul quadrato i punti danno luogo alla linea:

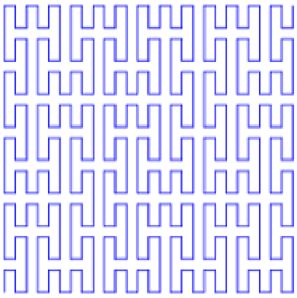


Alla seconda iterazione si ottiene invece la rappresentazione:



[7] Nel 1878 Cantor aveva dimostrato l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo unitario e il quadrato unitario.

Alla terza:

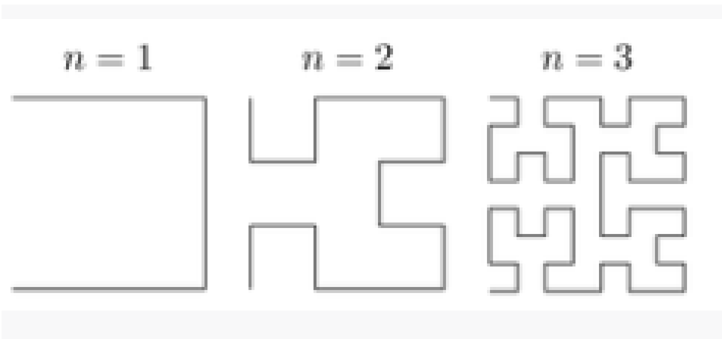


E così via, fino a riempire completamente il quadrato.

Foto della terrazza della casa di Peano a Cavoretto,

dove il matematico aveva fatto rappresentare la sua curva con mattonelle bianche e nere

L'anno successivo, un altro importante matematico, David Hilbert, elaborò la variante di questa rappresentazione che oggi è nota appunto come curva di Hilbert:



Molti altri esempi di curve che riempiono un quadrato furono proposti negli anni successivi, tuttavia la curva di Peano ha conservato il suo fascino, perché fu il primo esempio di una linea che mise in discussione la definizione di curva che era stata proposta da Jordan nel 1887. Secondo Jordan una curva piana era definita come l'insieme dei punti di coordinate (x(t),y(t)), con x(t) e y(t) funzioni continue del parametro *t*, variabile nell'intervallo [0,1]. Trattandosi di un insieme dipendente da un solo parametro *t*, sembrava logico pensare a una curva come il percorso descritto da una particella al variare del tempo *t*, cioè come un ente unidimensionale. La curva di Peano, ricoprendo un quadrato, non poteva essere uni-dimensionale, ma avere dimensione "2".[8] La sua regolarità in una complessità geometrica, la riproduzione di un elemento base, che resta sempre uguale, ma in una scala sempre più piccola, contribuì a iniziare una nuova branca della matematica, la geometria frattale, che ha individuato un ordine in alcune strutture caotiche dell'universo. Lo studio dei sistemi complessi, dei flussi turbolenti, dei moti caotici è una sfida ancora aperta nella storia della scienza.

Figura di Lichtenberg (http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Square1.jpg)

Frattale prodotto da una scarica elettrica su un materiale isolante

[8] Altre curve particolari, con le relative dimensioni, sono elencate all'indirizzo: https://it.wikipedia.org/wiki/Lista_di_frattali_per_dimensione_di_Hausdorff

«Adesso la mia antica parte di nepticula umanista mi impacciava e non sapevo come far capire allo zio che ero cambiata. Avrei voluto accostarmi al suo mondo lucido e difficile, che giudicavo virile. Avevo disprezzato la matematica quando credevo consistesse nel far di conto e l'avevo odiata perché non riuscivo a far le divisioni con più cifre; ora mi affascinava come ordine astratto, elusivo di emozioni e passioni. Sapevo che era il «suo» ordine, il suo linguaggio. Conoscevo una frase di lui che trovavo chiarissima e insieme misteriosa: «Tutto è numero». Mi dava un senso di pace per il suo carattere di totalità. Un filosofo inglese [B. Russell, NdC] aveva detto di lui che era «una mente immune da errore». Non era il massimo della perfezione umana?»[9]

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Avellone, *Filosofia e fondamenti di Geometria a fine Ottocento – Aspetti per un percorso didattico* - http:// math.unipa.it/~grim/avellone.pdf

[2] M. Avellone, A. Brigaglia, C. Zappulla, *La storia dei Fondamenti della Geometria Proiettiva: un'Antologia*, http://math.unipa.it/~brig/sds/MATERIALI/MATEMATICA/sitofondamenti/VOLUME/INDEX.HTM

[3] A. Berarducci, *La verità matematica da Kant a Godel*, Università di Pisa, 2010

[4] M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *Il problema dei fondamenti della matematica nella scuola di Peano*, Epistemologia, VI, 1983

[5] C. B. Boyer, *Storia della matematica*, trad. di Adriano Carugo, Mondadori, Milano 1980 (edizione originale: A History of Mathematics , John Wiley & Sons, New York 1968)

[6] U. Cassina, *Storia e analisi del "Formulario Completo" di Peano*, in Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 10 (1955), n.4

[7] W. S. Contro, *Da Pasch a Hilbert*, Archive for History of Exact Science, vol. 15 (3), 1976, pp. 283-295

[8] P. Freguglia, *Geometric Calculus and Geometry Foundations in Peano,* Springer 2011

[9] P. Freguglia, *Il contributo di G. Peano agli studi sui fondamenti della geometria*, in Atti del convegno *La storia delle matematiche in Italia*, Cagliari, 29-30 set. e 1 ott. 1982

[9] Lalla Romano, [18]

[10] P. Freguglia, *La geometria di Peano e la sua scuola*

http://mathematica.sns.it/media/volumi/142/Paolo%20Freguglia%20-%20

[11] H. C. Kennedy, *Peano: storia di un matematico*, Bollati Boringhieri 1983

[12] G. Lolli, *Il metodo assiomatico*, http://homepage.sns.it/lolli/dispense11/11-cap6.pdf

[13] P. Longo, *Algebra lineare:* http://pagine.dm.unipi.it/~a005928/miei/dispense2/algebra_man_uso.pdf

[14] E. Luciano, C. S. Roero, S. Chiavero, D. Damiano, *Lo spirito creativo è leggero; Giuseppe Peano matematico e maestro*, Cuneo 2008

[15] C. F. Manara, *Giuseppe Peano e i fondamenti della geometria*, 1994,

http://www.carlofelicemanara.it/public/file/File/Divulgazione/Collaborazioni%20a%20riviste/Periodico%20IMSI/Giuseppe%20Peano%20e%20i%20Fondamenti%20della%20Geometria.pdf

[16] C. Marchini, *Il problema ontologico della Matematica* in *Lezioni di Epistemologia e Storia della Matematica*, http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/SSIS/Marchini/2%b0anno/Ontologia.pdf

[17] G. Rinzivillo*, Una epistemologia senza storia*, ed. Nuova Cultura 2012

[18] L. Romano, *Una giovinezza inventata*, Einaudi 1995

[19] B. Russel, *La mia filosofia*, trad. di Francesca Pasquini, Newton Compton, Roma 1995

[20] J. T. Smith, *Definitions and Nondefinability in Geometry: Legacies of Mario Pieri and Alfred Tarski*, Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics, Annual Meeting, 2010

[21] C. Zappulla, *I fondamenti della geometria nella scuola italiana di fine Ottocento*, 2006, in math.unipa.it/~cerroni/I%20Fondamenti%20di%20Geometria.ppt